Б.Г. Зив
В.М. Мейлер

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

7

ИП
ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Б.Г. Зив   В.М. Мейлер

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

7 КЛАСС

16-е издание

Москва
"Просвещение"
2010

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21
З-59

Зив Б. Г.

З-59 Геометрия. Дидактические материалы. 7 класс / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер. — 16-е изд. — М. : Просвещение, 2010. — 127 с.: ил.— ISBN 978-5-09-023439-9.

Данное пособие содержит самостоятельные и контрольные работы, а также математические диктанты по курсу геометрии 7 класса. Оно ориентировано на учебник «Геометрия, 7—9» авторов Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева, Э. Г. Позняка, И. И. Юдиной.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-023439-9

ПРЕДИСЛОВИЕ

В пособии представлено 26 самостоятельных работ, 5 контрольных работ, 4 математических диктанта, примерные задачи к экзамену по геометрии.

Самостоятельные работы обозначены буквой **С** с соответствующим номером. Например, **С—2** — это вторая самостоятельная работа. Основная цель предлагаемых самостоятельных работ — помочь учителю организовать деятельность учащихся по решению задач с учетом их индивидуальных особенностей и уровня подготовки. Кроме того, самостоятельные работы могут использоваться для текущего контроля умений и навыков.

Самостоятельные работы даны в восьми вариантах.

В первом и втором вариантах каждой работы предлагаются задачи, для успешного решения которых учащиеся должны применить знания на уровне минимальных программных требований.

Третий и четвертый варианты состоят из задач среднего уровня сложности. Решение этих задач предусматривает умение распознавать понятия в стандартных ситуациях, применять знания в стандартных условиях или при небольших отклонениях от них. Задачи третьего и четвертого вариантов по сложности примерно соответствуют большинству основных задач учебника.

Пятый и шестой варианты предназначены для наиболее подготовленных учащихся. При решении задач этих вариантов требуется уметь применять знания в усложненных ситуациях, иметь достаточно высокий уровень развития вычислительных навыков и навыков проведения тождественных преобразований. По сложности эти задачи примерно соответствуют наиболее трудным из основных и дополнительных задач учебника.

Седьмой и восьмой варианты состоят из задач, при решении которых требуется творческое применение знаний. Здесь приходится анализировать сложные нестандартные геометрические ситуации, самостоятельно открывать новые факты, устанавливать отношения между ними. По сложности эти задачи примерно соответствуют разделу «Задачи повышенной трудности» учебника.

Задания из седьмого и восьмого вариантов могут быть даны учащимся после выполнения ими основной работы наравне со всеми учащимися класса в оставшееся время или использованы в качестве необязательных заданий для домашней работы, а также на занятиях математического кружка.

В пособии приведены три самостоятельные работы, отмеченные знаком *. Первый и второй варианты в этих работах имеют задачи, сложность которых несколько превосходит минимальные программные требования. Эти работы рекомендуется проводить в наиболее подготовленных классах.

Число самостоятельных работ в пособии явно избыточно. Учителю не следует стремиться обязательно выполнить с учащимися все задания каждой из работ. Предполагается, что представленный в пособии набор работ позволит педагогу на любом уроке отобрать необходимые задания в зависимости от цели урока, наличия учебного времени, уровня подготовки учащихся.

Работы скомпонованы в пособии по вариантам.

Наличие восьми вариантов заданий позволяет учителю один экземпляр книги разделить на 8 маленьких книг, каждая из которых дается отдельному ученику.

Контрольные работы обозначаются в пособии буквой **К** с соответствующим номером. Они предназначены для проведения итоговой проверки знаний по каждой из четырех глав учебника (работы **К—1**, **К—2**, **К—3**, **К—4** соответственно) и по всему курсу геометрии VII класса (работа **К—5**).

В работу **К—4** не вошли задачи по материалу § 4 гл. IV учебника «Построение треугольника по трем элементам». Этот материал проверяется в контрольной работе **К—5**.

Контрольные работы составлены в четырех вариантах. Сложность всех вариантов работ примерно одинаковая.

В каждом варианте имеются два задания, отмеченные знаком °. Это задачи на уровне минимальных программных требований. Они составляют обязательную часть работы.

Далее приводятся три задания, которые проверяют дальнейшее математическое развитие учащихся. При этом последнее задание потребует творческого применения знаний, анализа нестандартных геометрических конфигураций, проведения достаточно сложных дедуктивных рассуждений. Это задание обозначено знаком *.

Предполагается, что при проведении каждой из работ учитель определяет, какие из задач, не отмеченных знаком °, войдут в работу в зависимости от уровня подготовки учащихся и времени, отводимого на работу. Так, например, для работы **К—1**, рассчитанной на 45 мин, возможна такая компоновка заданий:

— задания 1°, 2°, 3а или 1°, 2°, 3б в слабом классе;

— задания 1°, 2°, 3а, 3б, или 1°, 2°, 3б, 4*, или 1°, 2°, 3а, 3б, 4* в сильном классе.

При этом для получения отметки «3» выполнить задания 1°, 2° достаточно. Выполнение же заданий, не отмеченных знаком °, является необходимым условием для выставления отметок «4» и «5» (или сразу двух таких отметок — основной и дополнительной).

Возможны и другие пути использования предложенных контрольных работ.

Математические диктанты обозначаются буквами **МД** с номером, соответствующим главе учебника. Например, **МД—4** — это математический диктант по главе IV.

Математические диктанты предназначаются для систематизации теоретических знаний учащихся и могут предшествовать контрольной работе. Диктант представляет собой набор теоретических вопросов и небольших задач по прямому применению теории.

При проведении диктанта учитель предлагает вопрос или задачу, а ученики должны в течение нескольких минут дать на них ответ. Необходимое для ответа время регулирует учитель в зависимости от сложности вопроса и подготовленности класса. На такую работу отводится 30—35 мин, после чего учитель вместе с классом проверяет правильность ответов к поставленным вопросам и обращает внимание класса на допущенные ошибки.

Учитель по своему усмотрению может предлагать не все вопросы диктанта, а только их часть.

В конце пособия даны ответы ко всем самостоятельным и контрольным работам, а также указания и решения к наиболее сложным заданиям.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНЫХ РАБОТ ПО ПУНКТАМ УЧЕБНИКА

Самостоятельная работа	Тема	Пункт учебника
С—1	Прямая и отрезок	1
С—2	Луч и угол	3, 4
С—3	Сравнение отрезков и углов	5, 6
С—4	Измерение отрезков и углов	7, 8, 9
С—5	Перпендикулярные прямые, смежные и вертикальные углы	11, 12
С—6	Треугольник	14
С—7	Первый признак равенства треугольников	15
С—8	Медианы, биссектрисы и высоты треугольника. Свойства равнобедренного треугольника	17, 18
С—9	Второй и третий признаки равенства треугольников	19, 20
С—10*	Равенство треугольников	15, 18, 19, 20
С—11	Окружность	21
С—12	Построение циркулем и линейкой	22, 23
С—13	Признаки параллельности двух прямых	24, 25
С—14	Практические способы построения параллельных прямых. Аксиома параллельных прямых и следствия из нее	26, 28
С—15	Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей (Свойства параллельных прямых)	29
С—16	Параллельные прямые	25, 29
С—17	Теорема о сумме углов треугольника. Остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники	30, 31
С—18	Теорема о соотношении между сторонами и углами треугольника	32
С—19	Неравенство треугольника	33
С—20	Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника. Прямоугольный треугольник с углом в 30°	34
С—21	Признаки равенства прямоугольных треугольников	35
С—22	Перпендикуляр и наклонная. Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми	37
С—23*	Множество точек, равноудаленных от данной прямой	37
С—24	Построение треугольника по трем элементам	38
С—25*	Более сложные случаи построения треугольников	38
С—26	Итоговое повторение	

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ РАБОТЫ

ВАРИАНТ 1

С—1 (Рис. 1)

1. Пересекаются ли отрезки AB и CD?
2. Пересекаются ли прямые AB и CD?
3. Отметьте точку M так, чтобы она лежала на прямой CD, но не лежала ни на отрезке AB, ни на отрезке CD?
4. Отметьте точку N, которая лежит на прямой CD между точками A и B. Как вы назовете такую точку?

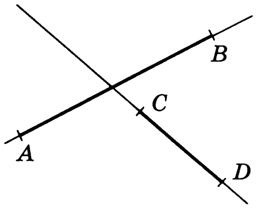

Рис. 1

С—2

1. 1) Сколько лучей с началом в точке O изображено на рисунке 2?
   2) Сколько углов изображено на этом рисунке?
   3) Постройте луч OM так, чтобы угол AOM был развернутым.
2. Начертите угол. Отметьте точку M, которая лежит на стороне угла, точку N, лежащую во внутренней области угла, и точку E, принадлежащую его внешней области.

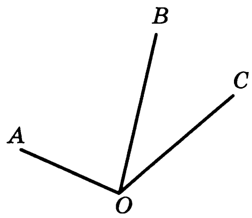

Рис. 2

С—3

1. На рисунке 3 $CB = BE$, $DE > AC$. Сравните отрезки AB и DB.
2. На рисунке 4 $\angle AOB = \angle DOC$. Есть ли еще на рисунке равные углы?

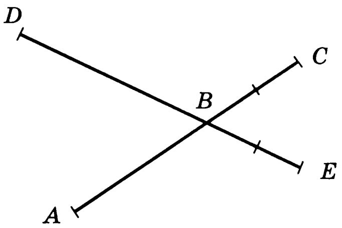

Рис. 3

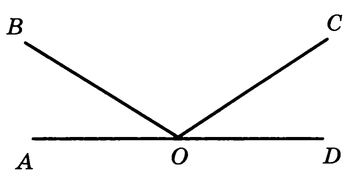

Рис. 4

С—4

1. На прямой m лежат точки M, N и K, причем $MN = 85$ мм, $NK = 1{,}15$ дм. Какой может быть длина отрезка MK в сантиметрах?
2. $\angle AOB = 90°$. Проведите луч OC так, чтобы угол AOC равнялся $45°$ (рассмотрите два случая).
   1) Чему равен угол COB?
   2) Каким углом: острым, тупым или развернутым — является угол COB?
   3) Является ли луч OC биссектрисой угла AOB?

С—5

1. Смежные углы относятся как 4 : 1. Найдите эти углы.
2. На рисунке 5 прямые a и b перпендикулярны, $\angle 1 = 40°$. Найдите углы 2, 3 и 4.

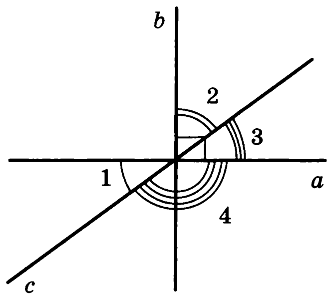

Рис. 5

С—6

1. $\triangle MEP = \triangle ABC$, $MP = AC$, $\angle E = 45°$. Найдите угол B.
2. На рисунке 6 $BD = DC$. Сравните периметры треугольников ABC и ABD.

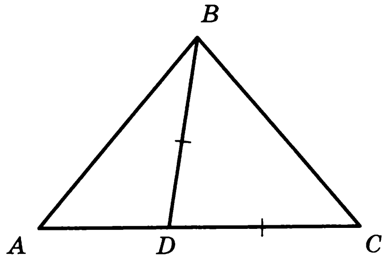

Рис. 6

С—7

1. На рисунке 7 $BD = AC$, $OB = OC$. Докажите, что $\triangle AOB = \triangle COD$.

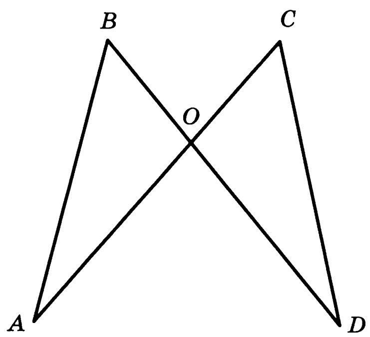

Рис. 7

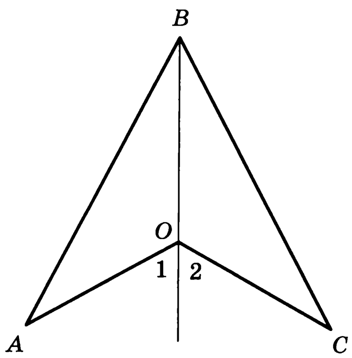

Рис. 8

2. На рисунке 8 $OA = OC$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $AB = BC$.

С—8

1. Проведите общую для всех изображенных на рисунке 9 треугольников высоту. Для какого из треугольников эта высота расположена вне его?

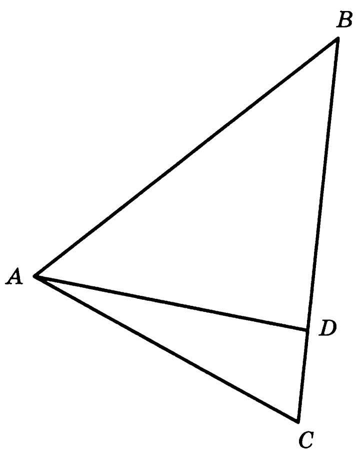

Рис. 9

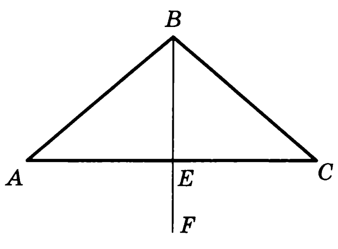

Рис. 10

2. На рисунке 10 $AB = BC$, BE — медиана треугольника ABC. $\angle ABE = 40°30'$. Найдите $\angle ABC$ и $\angle FEC$.

С—9

1. На рисунке 11 $AB = BC$, $AK = KC$, $\angle AKE = \angle PKC$. Докажите, что $\triangle AKE = \triangle KPC$.

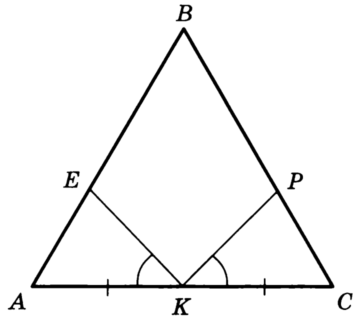

Рис. 11

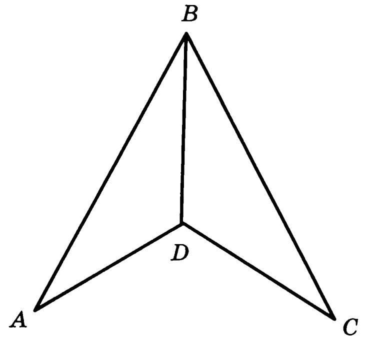

Рис. 12

2. На рисунке 12 $AB = BC$ и $AD = DC$. Докажите, что BD — биссектриса угла ABC.

С—10

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, точки D и D_1 лежат соответственно на сторонах AC и A_1C_1, причем $CD = C_1D_1$. Докажите, что $\triangle BDC = \triangle B_1D_1C_1$. Сравните отрезки BD и B_1D_1.

С—11

1. На рисунке 13 хорды AB и CD равны. Докажите, что $\angle AOB = \angle COD$.
2. Начертите отрезок и луч. На данном луче от его начала отложите отрезок, длина которого в 2 раза больше длины данного отрезка.

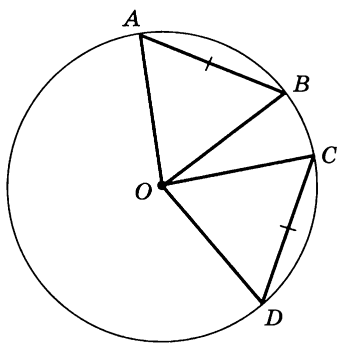

Рис. 13

С—12

1. Даны острые углы ABC и MON. От стороны AB во внешнюю область угла ABC отложите угол, равный углу MON.
2. Постройте прямой угол и его биссектрису.

С—13

1. Параллельны ли прямые a и b (рис. 14), если:

1) $\angle 1 = \angle 3$; 3) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$;
2) $\angle 1 = \angle 4$; 4) $\angle 5 = \angle 6 = 90°$?

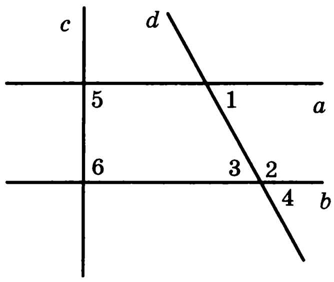

Рис. 14

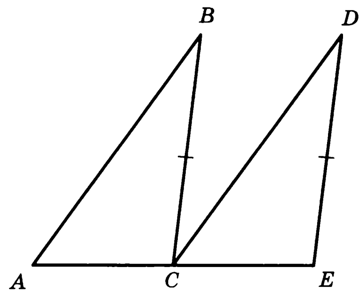

Рис. 15

2. На рисунке 15 $\triangle ABC = \triangle CDE$, $BC = DE$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

С—14

1. С помощью угольника и линейки через вершины B и D (рис. 16) проведите прямые a и b, параллельные AC. Будет ли $a \parallel b$? Объясните.

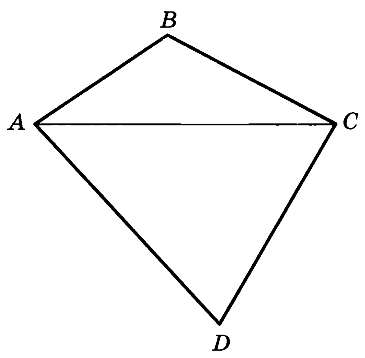

Рис. 16

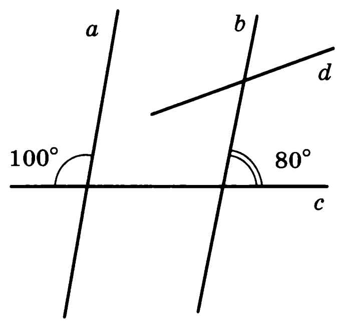

Рис. 17

2. На рисунке 17 прямая d пересекает прямую b. Пересечет ли эта прямая прямую a? Почему?

С—15

1. Один из внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей, в 3 раза больше другого. Чему равны эти углы?
2. В прямоугольном треугольнике ACB ($\angle C = 90°$), $E \in AC$, $F \in AB$, причем $EF \parallel CB$, EK — биссектриса треугольника AEF. Чему равен угол AEK?

С—16

1. Используя данные рисунка 18, найдите углы 1, 2 и 3.

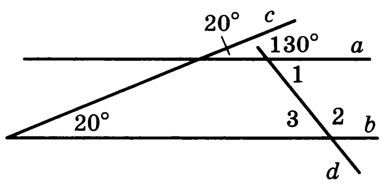

Рис. 18

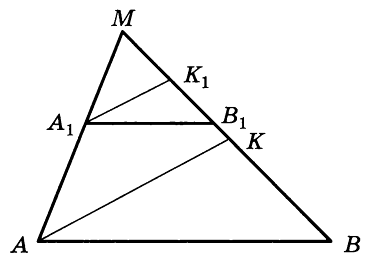

Рис. 19

2. На рисунке 19 $A_1B_1 \parallel AB$, A_1K_1 — биссектриса угла MA_1B_1, AK — биссектриса угла MAB. Докажите, что $\angle MA_1K_1 = \angle MAK$. Могут ли пересекаться прямые A_1K_1 и AK?

С—17

1. Могут ли углы треугольника быть равными 60°13′, 69°48′, 50°?
2. Внешний угол треугольника больше углов, не смежных с ним, соответственно на 60° и 50°. Является ли этот треугольник остроугольным?

С—18

1. Даны треугольники ABC и MPK, $AB = MP = 5$ см, $AC = MK = 3$ см, $\angle A = \angle M$. Сравните углы B и K.
2. В треугольнике ABC $\angle A = \angle C$, M — середина стороны AC. Найдите угол AMB.

С—19

1. Можно ли из проволоки длиной 12 см согнуть равнобедренный треугольник с боковой стороной в 3 см?

2. На сторонах AB и AC треугольника ABC отмечены точки D и E, причем точка D является серединой отрезка AB, $AE = 12$ см, $DE = 1$ см. Может ли длина отрезка AB быть равной 27 см?

С—20

1. На рисунке 20 $\angle BAD = \angle BCD = 90°$, $\angle ADB = 15°$, $\angle BDC = 75°$. Докажите, что $AB \parallel DC$.

2. В треугольнике ABC $\angle C = 60°$, $\angle B = 90°$. Высота BB_1 равна 2 см. Найдите BA.

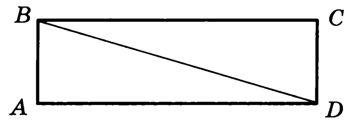

Рис. 20

С—21

1. На рисунке 21 диаметры AB и CD окружности лежат на перпендикулярных прямых, $MO = EO$. Докажите, что $AM = BE$.

2. Внутри неразвернутого угла A взята точка D, из которой проведены перпендикуляры DB и DC к сторонам угла. $\angle ADB = \angle ADC$. Докажите, что луч AD — биссектриса угла A.

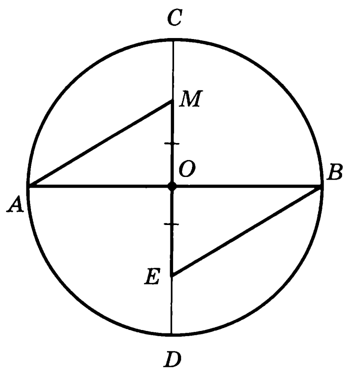

Рис. 21

С—22

1. Даны две параллельные прямые a и b. На прямой a взяты точки A и B, из которых к прямой b проведена наклонная AC и перпендикуляр BD. Сравните отрезки AC и BD.

2. В треугольнике ABC $\angle C = 30°$, $AC = 10$ см, $BC = 8$ см. Через вершину A проведена прямая a, параллельная BC. Найдите:
   а) расстояние от точки B до прямой AC;
   б) расстояние между прямыми a и BC.

С—23*

1. Середина отрезка AB перемещается по некоторой прямой a так, что прямые AB и a в любой момент времени взаимно перпендикулярны (рис. 22). Что представляет собой фигура, которую описывают точки A и B?

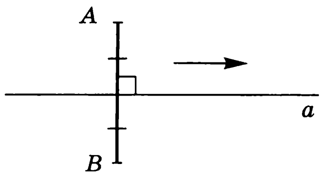

Рис. 22

2. Даны неразвернутый угол ABC и отрезок QP. На стороне BA угла ABC постройте точку, удаленную от прямой BC на расстояние QP.

С—24

1. Дан треугольник MPK. Постройте треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle M$, $AB = MP$, $AC = 2MK$.
2. Постройте равносторонний треугольник, у которого сторона вдвое меньше данного отрезка.

С—25*

1. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и медиане, проведенной к основанию.
2. Дан треугольник ABC. Постройте треугольник MPK, в котором $MP = 2AB$, $\angle M = \angle A$, а высота KE равна высоте CD треугольника ABC.

С—26

На рисунке 23 $\angle BAC = 50°$, $\angle ABC = 80°$, $\angle DBC = 50°$, точка O — середина отрезков AB и MC.

1) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
2) Докажите, что прямые BD и AC не пересекаются.
3) Найдите $\angle MAB$.
4) Сравните отрезки AM и AC.

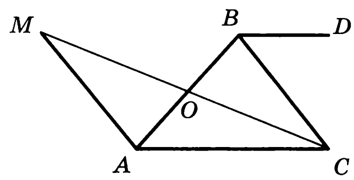

Рис. 23

ВАРИАНТ 2

С—1 (Рис. 24)

1. Пересекает ли прямая KL отрезок EF?
2. Пересекает ли прямая KL прямую EF?
3. Отметьте точку A, которая лежит на прямой EF, но не лежит на прямой KL.
4. Существуют ли точки, которые одновременно лежат на отрезке EF и прямой LK?

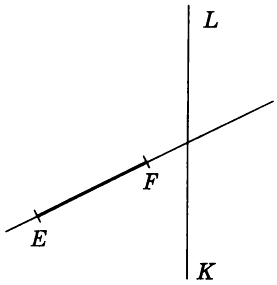

Рис. 24

С—2

1. 1) Сколько лучей с началом в точке O изображено на рисунке 25?
   2) Сколько углов изображено на этом рисунке?
   3) Начертите луч OA так, чтобы угол AON был развернутым.
2. Начертите угол. Изобразите отрезок: а) все точки которого лежат во внутренней области угла; б) все точки которого лежат во внешней области угла; в) часть точек которого лежит во внутренней области угла.

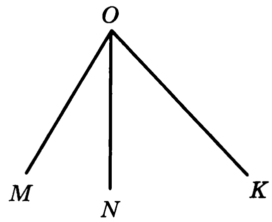

Рис. 25

С—3

1. На рисунке 26 $EO = NO$, $OK > OL$. Сравните отрезки EK и NL.

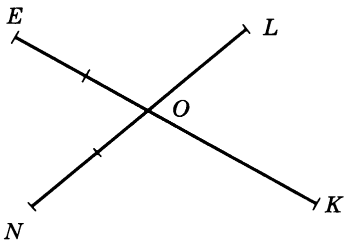

Рис. 26

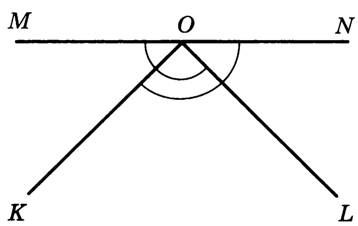

Рис. 27

2. На рисунке 27 $\angle MOL = \angle KON$. Есть ли еще на рисунке равные углы?

С—4

1. Точки A, B и C лежат на прямой a, причем $AB = 5{,}7$ м, $BC = 730$ см. Какой может быть длина отрезка AC в дециметрах?

2. $\angle AOB = 120°$. Проведите луч OC так, чтобы угол AOC равнялся $60°$ (рассмотрите два случая).
   1) Чему равен угол COB?
   2) Каким углом: острым, тупым или развернутым — является угол COB?
   3) Является ли луч OC биссектрисой угла AOB?

С—5

1. Один из смежных углов больше другого на $40°$. Найдите эти углы.

2. На рисунке 28 прямые a и b перпендикулярны, $\angle 1 = 130°$. Найдите углы 2, 3 и 4.

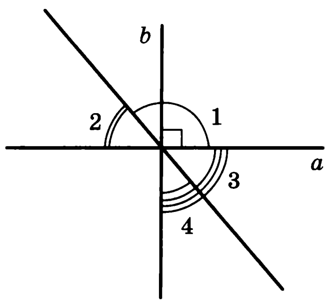

Рис. 28

С—6

1. $\triangle APC = \triangle MFB$, $\angle P = \angle M$, $FB = 17$ см. Найдите AC.

2. На рисунке 29 $ED = DK$. Сравните периметры треугольников DFK и EFK.

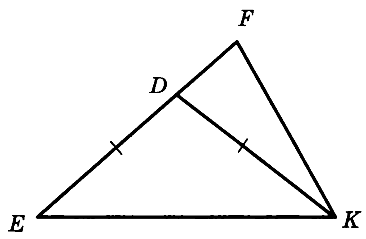

Рис. 29

С—7

1. $AA_1 = CC_1$, $BC = B_1C_1$, $BC \perp AC$, $B_1C_1 \perp A_1C_1$ (рис. 30). Докажите, что $\triangle ACB = \triangle A_1C_1B_1$.

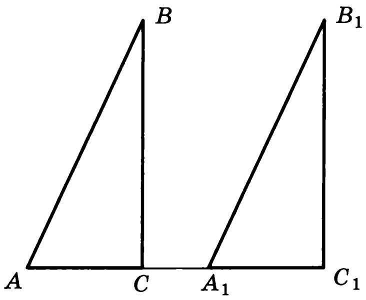

Рис. 30

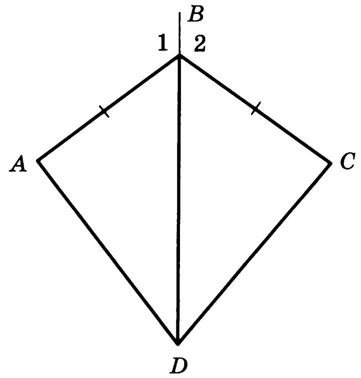

Рис. 31

2. На рисунке 31 $AB = BC$, $\angle 1 = \angle 2$. Докажите, что $\angle ADB = \angle CDB$.

С—8

1. Проведите общую высоту для всех изображенных на рисунке 32 треугольников. Для каких треугольников эта высота лежит внутри треугольника?

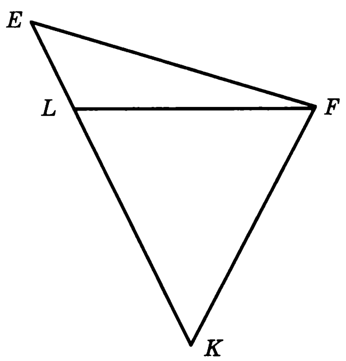

Рис. 32

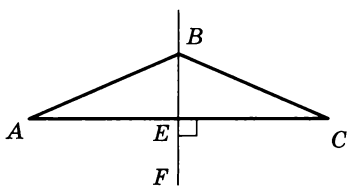

Рис. 33

2. На рисунке 33 $AB = BC$, $\angle FEC = 90°$, $AE = 10$ дм, $\angle ABC = 130°30'$. Найдите AC и $\angle EBC$.

С—9

1. На рисунке 34 $AB = BC$, $MA = PC$, $\angle AMO = \angle OPC$. Докажите, что $\triangle AMO = \triangle OPC$.

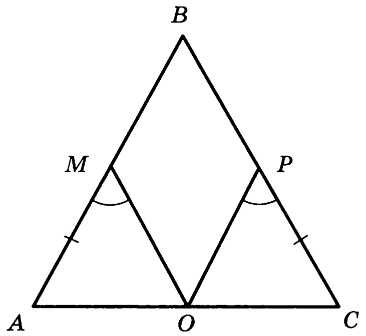

Рис. 34

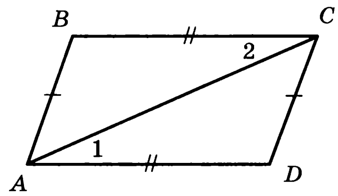

Рис. 35

2. На рисунке 35 $AB = CD$, $BC = AD$. Докажите, что $\angle 1 = \angle 2$.

С—10

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, точки D и D_1 лежат соответственно на сторонах AC и A_1C_1, $\angle DBC = D_1B_1C_1$. Докажите, что $\triangle BDC = \triangle B_1D_1C_1$. Сравните углы BDC и $B_1D_1C_1$.

С—11

1. На рисунке 36 $\angle MON = \angle QOP$. Докажите, что хорды MN и QP равны.
2. На данной прямой отметьте две точки так, чтобы расстояние между ними было вдвое больше данного отрезка.

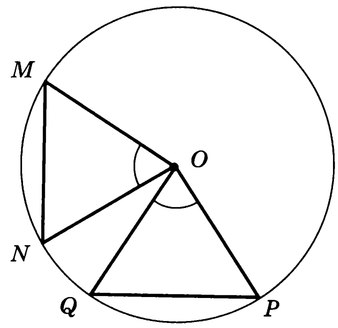

Рис. 36

С—12

1. Даны острый угол MNK и тупой угол ABC. От стороны AB во внутреннюю область угла ABC отложите угол, равный углу MNK.
2. Постройте отрезок, соединяющий середины двух данных отрезков.

С—13

1. Параллельны ли прямые a и b на рисунке 37, если:
   1) $\angle 1 = \angle 2 = 90°$;
   2) $\angle 3 = \angle 4$;
   3) $\angle 4 = \angle 5$;
   4) $\angle 4 + \angle 6 = 180°$?

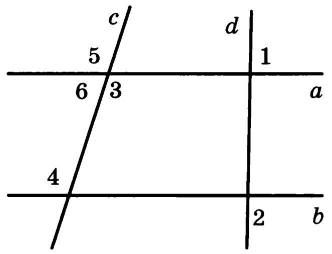

Рис. 37

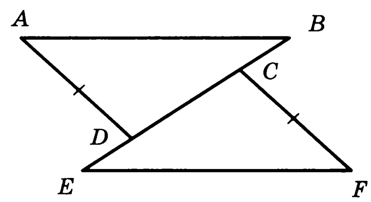

Рис. 38

2. На рисунке 38 $\triangle ABD = \triangle ECF$, $AD = CF$. Докажите, что $AB \parallel EF$.

С—14

1. С помощью угольника и линейки проведите через точки A и C (рис. 39) прямые m и n, параллельные BD. Будет ли $m \parallel n$? Дайте объяснение.

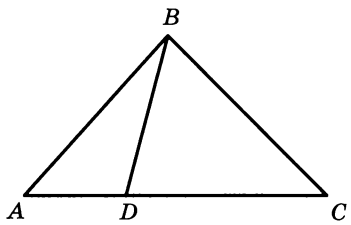

Рис. 39

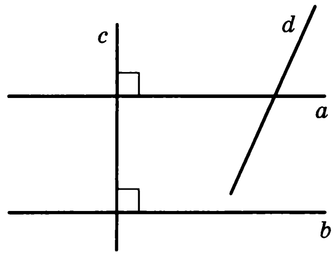

Рис. 40

2. На рисунке 40 $a \perp c$ и $b \perp c$. Прямая d пересекает прямую a. Пересекает ли эта прямая прямую b? Почему?

С—15

1. Один из внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, больше другого на 64°. Чему равны эти углы?
2. В прямоугольном треугольнике MEF ($\angle E = 90°$) $C \in ME$, $D \in MF$, причем $CD \parallel EF$, $K \in MD$, $\angle KCD = 40°$. Чему равен угол MCK?

С—16

1. Используя данные рисунка 41, найдите углы 1, 2 и 3.

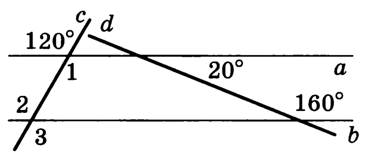

Рис. 41

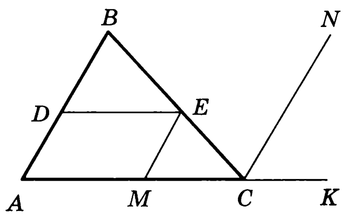

Рис. 42

2. На рисунке 42 $DE \parallel AC$, EM — биссектриса угла DEC, CN — биссектриса угла BCK. Докажите, что $\angle MEC = \angle ECN$. Имеют ли общие точки прямые ME и CN?

С—17

1. Внешний угол треугольника равен 150°. Могут ли два его угла быть равными 90°31′ и 58°42′?
2. Первый угол треугольника на 30° меньше второго и на 30° больше третьего. Является ли этот треугольник прямоугольным?

С—18

1. Даны треугольники ABC и MPK, $AC = MK$, $\angle A = \angle M = 60°$, $\angle C = \angle K = 50°$. Сравните отрезки AB и PK.
2. В треугольнике ABC $\angle A = \angle B$, CE — биссектриса. Сравните отрезки AE и BE.

С—19

1. Можно ли из проволоки длиной 15 см согнуть равнобедренный треугольник с основанием 8 см?
2. На продолжении стороны AB треугольника ABC за вершину B отмечена точка D, $AC = 18$ см, $BC = 5$ см. Может ли отрезок AD быть равным 12 см?

С—20

1. На рисунке 43 $\angle AOD = 90°$, $\angle OAD = 20°$, $\angle OCB = 70°$. Докажите, что $AD = CB$.
2. В $\triangle ABC$ $\angle C = 90°$, CC_1 — высота, $CC_1 = 5$ см, $BC = 10$ см. Найдите угол CAB.

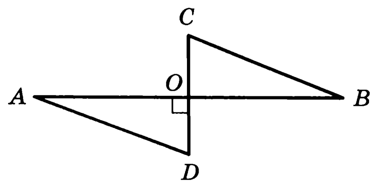

Рис. 43

С—21

1. На рисунке 44 O — центр окружности. Через концы отрезка AB проведены прямые AD и BC, перпендикулярные к прямой AB. Докажите, что $\angle ADO = \angle OCB$.
2. Два прямоугольных треугольника ABC и ABD имеют общую гипотенузу AB и лежат по разные стороны от нее. Известно, что $AD = BC$. Докажите, что $\angle CAB = \angle DBA$.

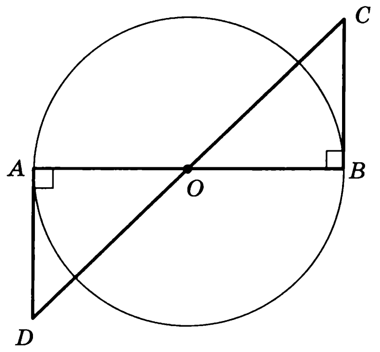

Рис. 44

С—22

1. По разные стороны от прямой a взяты точки A и B, равноудаленные от этой прямой. Из точки A к прямой a проведена наклонная AC, а из точки B — перпендикуляр BD. Сравните отрезки AC и BD.
2. В треугольнике MKP сторона MP равна 20 см. Расстояние от точки K до прямой MP равно $\frac{1}{2}KP$. Через точку M проведена прямая x, параллельная KP. Найдите:
   а) угол MPK;
   б) расстояние между прямыми x и KP.

С—23*

1. Сторона AB $\triangle ABC$ перемещается вдоль некоторой прямой, на которой она расположена (рис. 45). Что представляет собой фигура, которую описывает вершина C?

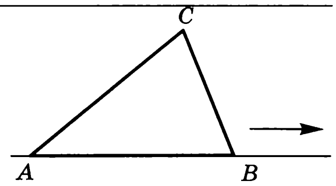

Рис. 45

2. Даны треугольник ABC и точка M, лежащая на стороне BC. На стороне AB постройте точку, удаленную от прямой AC на то же расстояние, что и точка M.

С—24

1. Дан треугольник MKP. Постройте треугольник ABC, в котором $\angle A = \angle M$, $\angle B = \angle K$, $AB = 2MK$.
2. Постройте равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна данному отрезку, а основание в 2 раза меньше боковой стороны.

С—25*

1. Постройте равнобедренный треугольник по биссектрисе, проведенной к основанию и углу, противолежащему основанию.
2. Дан треугольник MKP. Постройте треугольник ABC так, чтобы $AB = MK$, $AC = 2MP$, высота CD была равна высоте PE треугольника MPK.

С—26

На рисунке 46 $\angle EMK = 40°$, $\angle MKE = 70°$, прямые MC и EK не имеют общих точек, отрезки BE и KA являются высотами треугольника EMK.

1) Докажите, что треугольник EMK равнобедренный.
2) Найдите угол CME.
3) Докажите, что $KA = BE$.
4) Сравните отрезки MB и AK.

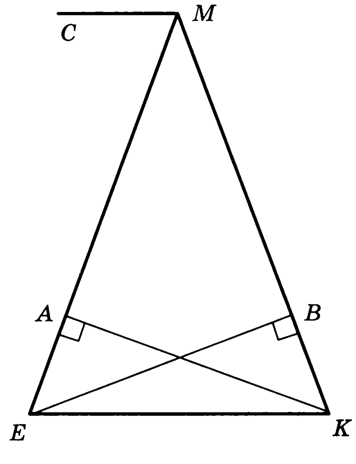

Рис. 46

ВАРИАНТ 3

С—1 (Рис. 47)

1. Сколько существует различных отрезков с концами в точках A, B, C и D?
2. Пересекаются ли прямые AB и CD?
3. Какая из точек, A или D, лежит между точками B и C?
4. Отметьте точку M, которая лежит на прямой AD, но не лежит на отрезке BC.

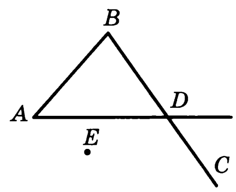

Рис. 47

5. Проведите прямую, проходящую через точку E, которая пересекает прямые AB и BC, но не пересекает отрезок AD.

С—2

1. 1) Сколько неразвернутых и сколько развернутых углов изображено на рисунке 48?
   2) Проведите лучи с началом в точке B, один из которых пересекал бы луч AC, а другой не пересекал бы его.

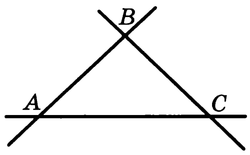

Рис. 48

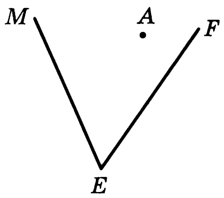

Рис. 49

2. Даны угол MEF и точка A, лежащая в его внутренней области (рис. 49). Проведите луч с началом в точке E так, чтобы образовались два угла, такие, что точка A не принадлежала бы их внутренним областям.

С—3

1. На прямой a от точки A в одном направлении отложены два отрезка AB и AC ($AC > AB$). От точки C на этой прямой отложите такой отрезок CE, чтобы $AC = BE$. Что вы можете сказать о длине отрезка CE?
2. $\angle AOC = \angle BOD$, OM — биссектриса $\angle AOB$ (рис. 50). Докажите, что OM — биссектриса $\angle COD$.

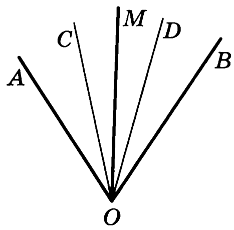

Рис. 50

С—4

1. На отрезке MN, равном 8 дм, лежат точки A и B по разные стороны от середины C отрезка MN, $CA = 7$ см, $CB = 0{,}24$ м. Найдите длины отрезков AN и BN в дециметрах.
2. $\angle AOB = 80°$. Луч OC делит этот угол на два угла так, что $\angle AOC = 4\angle COB$. 1) Найдите эти углы. 2) Найдите угол DOB, если луч OD проведен так, что OA — биссектриса угла DOB. Острым или тупым является этот угол?

С—5

1. Из точки O проведены лучи OA, OB и OC, причем $OB \perp OA$ (рис. 51). Угол, образованный биссектрисами углов AOB и BOC, равен 75°. Найдите углы AOB, BOC и AOC.
2. При пересечении двух прямых образовалось четыре угла меньше развернутого. Найдите эти углы, зная, что один из них на 60° больше половины другого.

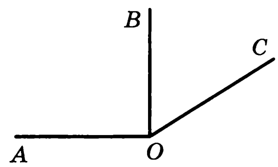

Рис. 51

С—6

1. $\triangle ABC = \triangle ADC$, $\angle ABC = 70°$ (рис. 52). Найдите $\angle MDC$.

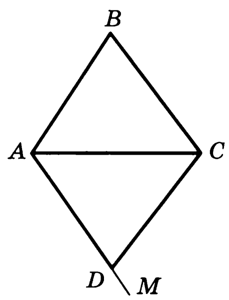

Рис. 52

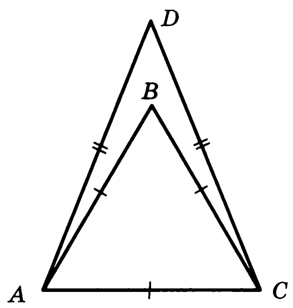

Рис. 53

2. На рисунке 53 $AB = BC = AC$, $AD = CD$. Периметр треугольника ABC равен 36 см, а периметр треугольника ADC равен 40 см. Найдите длины сторон этих треугольников.

С—7

1. На рисунке 54 $\angle BDC = \angle BEA$, $AD = EC$, $BD = BE$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle BEC$. Чему равен $\angle BAD$, если $\angle BCE = 40°$?

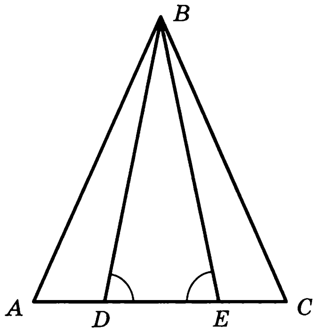

Рис. 54

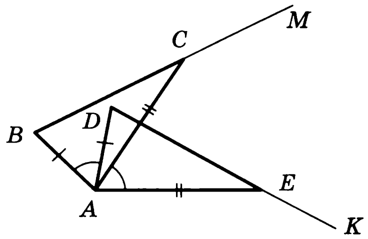

Рис. 55

2. На рисунке 55 $AB = AD$, $AC = AE$ и $\angle BAD = \angle CAE$. Равны ли отрезки BC и DE, углы MCA и KEA?

С—8

1. На рисунке 56 $\angle ADB = \angle CDB$, $AD = DC$. Докажите, что $\angle BAC = \angle BCA$ и $BD \perp AC$.

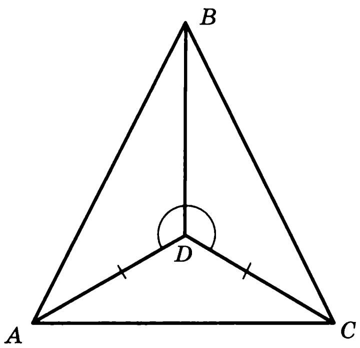

Рис. 56

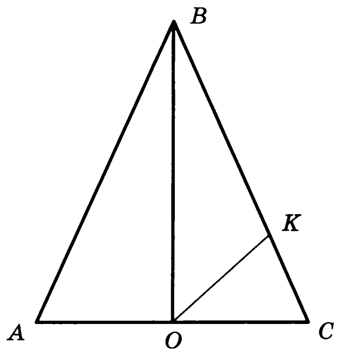

Рис. 57

2. На рисунке 57 $AB = BC$ и $AO = OC$, OK — биссектриса треугольника BOC. Найдите угол AOK.

С—9

1. На рисунке 58 $AM = MC$, $AE = DC$, $\angle BDA = \angle FEC$. Докажите, что $AB = FC$.
2. На стороне AC как на основании построены по одну сторону от нее два равнобедренных треугольника ABC и AMC. Докажите, что прямая BM пересекает сторону AC в ее середине.

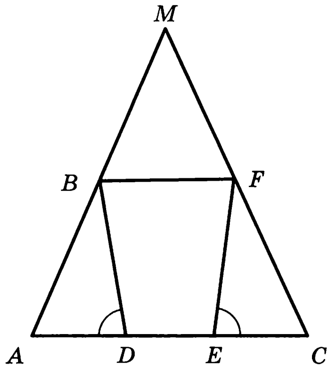

Рис. 58

С—10

Дан равнобедренный треугольник ABC с основанием AC. Точки D и E лежат соответственно на сторонах AB и BC, $AD = CE$. DC пересекает AE в точке O. Докажите, что треугольник AOC равнобедренный.

С—11

1. На рисунке 59 $AB = CD$ и точки E и F — середины хорд AB и CD. Докажите, что $OE = OF$.
2. Постройте окружность данного радиуса, которая проходит через данную точку M и центр которой лежит на данной прямой a ($M \notin a$).

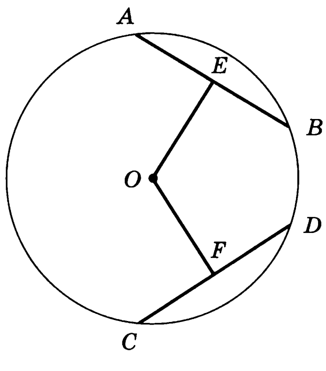

Рис. 59

С—12

1. Начертите произвольный остроугольный треугольник ABC и постройте точку пересечения высоты BD и биссектрисы AL этого треугольника.
2. От данного луча отложите угол, равный $\frac{1}{4}$ данного угла.

С—13

1. На рисунке 60 $AB = BC$, $\angle A = 60°$, CD — биссектриса угла BCE. Докажите, что $AB \parallel CD$.

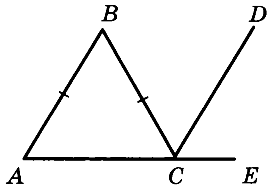

Рис. 60

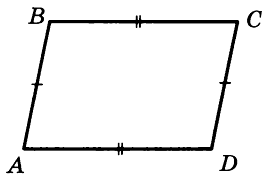

Рис. 61

2. На рисунке 61 $AB = CD$ и $BC = AD$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

С—14

1. С помощью угольника и линейки через вершины A, B и C проведите прямые a, b и c, параллельные прямой l. Параллельны ли эти прямые между собой? Пересечет ли прямая AC прямую l? Дайте объяснение (рис. 62).

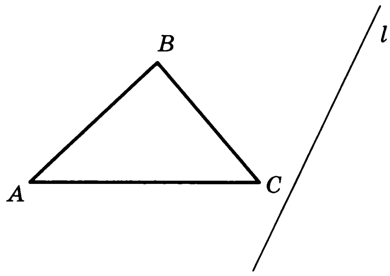

Рис. 62

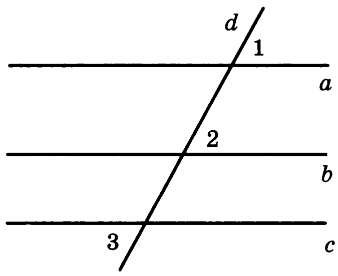

Рис. 63

2. На рисунке 63 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 2 = \angle 3$. Докажите, что $a \parallel c$.

С—15

1. На рисунке 64 $AC \parallel BD$ и $AC = AB$, $\angle MAC = 40°$. Найдите $\angle CBD$.

2. Отрезки CD и AB пересекаются в точке O так, что $AO = OB$, $AC \parallel DB$. Докажите, что $\triangle AOC = \triangle DOB$.

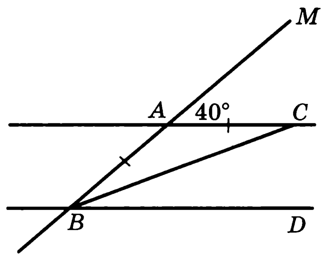

Рис. 64

С—16

1. Один из углов, образованных при пересечении прямой d прямыми a и b, равен $50°$ (рис. 65). Может ли один из остальных семи углов равняться $20°$? Почему?

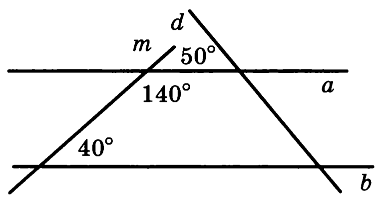

Рис. 65

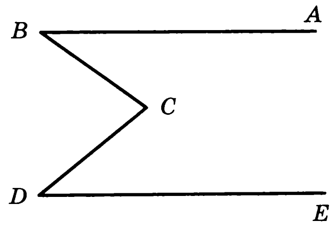

Рис. 66

2. На рисунке 66 $BA \parallel DE$. Докажите, что $\angle BCD = \angle B + \angle D$.

С—17

1. В треугольнике ABC $AB = BC$, $\angle B = 80°$. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке M. Найдите угол AMC.
2. В треугольнике ABC угол C равен $15°$. На стороне AC отмечена точка D так, что $\angle ABD = 12°$, $\angle ADB = 80°$. Докажите, что треугольник ABC не является прямоугольным.

С—18

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. Точка M лежит на стороне AC. Докажите, что $BC < BM < AB$.
2. В треугольнике ABC $AB = BC$. На продолжении сторон AC и BC за вершину C отмечены точки D и E соответственно. Известно, что $DE \parallel AB$. Докажите, что треугольник CDE равнобедренный.

С—19

1. Расстояние между центрами двух окружностей (рис. 67) равно 10 см. Может ли радиус окружности с центром O_1 быть равным 5 см, а радиус окружности с центром O_2 быть равным 3 см?
2. Треугольники ABD и BCD расположены по разные стороны от прямой BD, $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ADB = \angle DBC$. Докажите, что
$$BD + BC > AB.$$

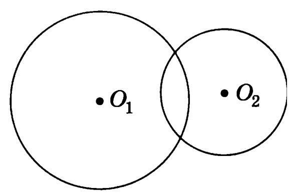

Рис. 67

С—20

1. На рисунке 68 $\angle BAC = \angle DEC = 90°$, $\angle ABC = 55°$, $\angle CDE = 35°$. Докажите, что $BC \perp CD$.

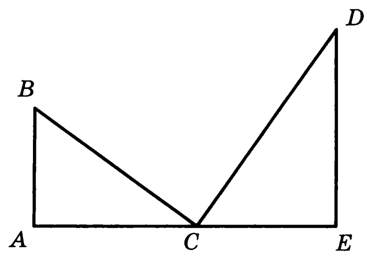

Рис. 68

2. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, внешний угол при вершине B равен 150°, AA_1 — биссектриса, $AA_1 = 20$ см. Найдите A_1C.

С—21

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC отмечены точки D и E соответственно. Из этих точек к прямой AC проведены перпендикуляры DK и EP, причем $AK = PC$ и $DK = PE$. Докажите, что $AB = BC$.

2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, причем $BC = B_1C_1$, $BA = B_1A_1$. Докажите, что высоты BD и B_1D_1 треугольников равны.

С—22

1. Из точки A к некоторой прямой проведены две наклонные AB и AC и перпендикуляр AD так, что точка D лежит на отрезке BC, $\angle DAC = 45°$. Сравните отрезки AB и DC.

2. Через концы A и B отрезка AB проведены параллельные прямые a и b соответственно. Прямые AB и b не перпендикулярны. C — середина отрезка AB.
   а) Докажите, что точка C находится на одинаковом расстоянии от прямых a и b.
   б) Докажите, что сумма расстояний от точки C до прямых a и b равна расстоянию между этими прямыми.

С—23*

1. На рисунке 69 точки A и B равноудалены от прямой CD, а точки A и D — от прямой BC. Докажите, что $AB = CD$.

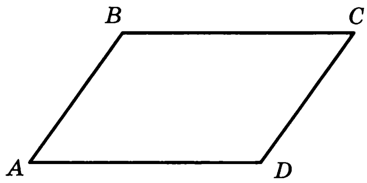

Рис. 69

2. Даны прямая a, точка A, не лежащая на этой прямой, и отрезок OP, больший, чем перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую a. Постройте точки, удаленные от прямой a и точки A на расстояние, равное отрезку OP.

С—24

1. Даны неразвернутый угол и отрезок. Постройте треугольник, у которого одна сторона в 2 раза больше другой и равна данному отрезку, а угол, заключенный между этими сторонами, равен данному углу.
2. Постройте остроугольный равнобедренный треугольник по основанию и разности двух неравных сторон.

С—25

1. Постройте прямоугольный треугольник по катету и медиане, проведенной к другому катету.
2. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и углу, противолежащему этому основанию.

С—26

На рисунке 70 $\angle ADB = \angle DBC = 90°$, $AD = BC$, $\angle ABD = 60°$.

1) Докажите, что прямые AD и BC не пересекаются.

2) Между какими целыми числами заключена длина отрезка AD, если $BD = 4$?

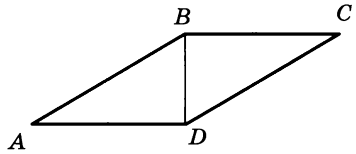

Рис. 70

3) Докажите, что треугольник AED равнобедренный, если DE — медиана треугольника ADB.

ВАРИАНТ 4

С—1 (Рис. 71)

1. Сколько существует различных отрезков с концами в точках E, F, M и N?
2. Пересекаются ли прямые EN и FM?
3. Какая из точек, A или N, лежит между точками E и F?
4. Отметьте точку B, которая лежит на отрезке MN, но не лежит на прямой EF.

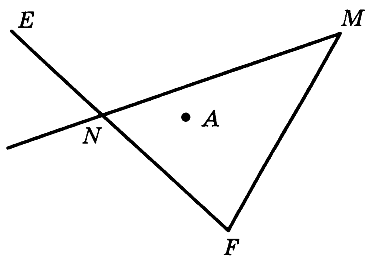

Рис. 71

5. Проведите прямую, проходящую через точку A, которая пересекает прямые EF и MN, но не пересекает отрезок FM.

С—2

1. 1) Сколько неразвернутых и сколько развернутых углов изображено на рисунке 72?
   2) Начертите луч CD, проведите два луча с началом в точке A, один из которых пересекал бы луч CD, а другой не пересекал бы его.

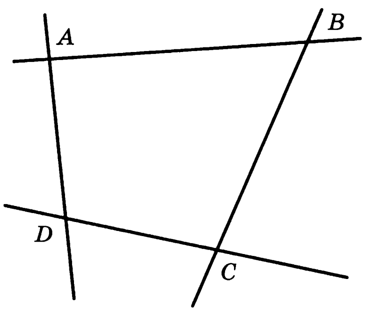

Рис. 72

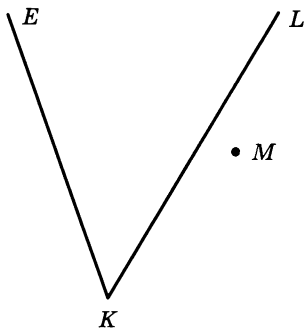

Рис. 73

2. Даны угол EKL и точка M, не лежащая в его внутренней области (рис. 73). Проведите из точки K луч так, чтобы образовалось еще два угла, такие, что точка M не лежала бы в их внутренней области.

С—3

1. На прямой m от точки A отложены два отрезка так, что $AC > AB$ и точка A лежит между точками B и C. От точки C отложен отрезок CM так, что $BM = AC$. Сравните отрезки MC и AB.

2. На рисунке 74 $\angle AOC = \angle BOC$ и $\angle AOE = \angle BOF$. Является ли луч OC биссектрисой угла EOF?

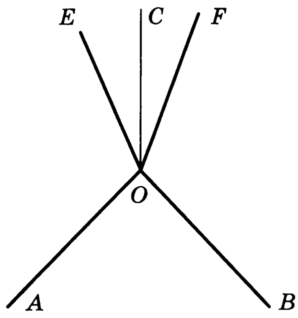

Рис. 74

С—4

1. Точка M — середина отрезка EF, длина которого равна 1,2 м. От точки M, по разные стороны от нее, отложены два отрезка $MP = 1{,}6$ дм и $MQ = 40$ см. Найдите длины отрезков EP и QF в сантиметрах.

2. $\angle AOB = 100°$, луч OE делит этот угол на два угла так, что $\angle BOE = 3\ \angle AOE$.
   1) Найдите эти углы.
   2) Найдите угол AOF, если луч OF проведен так, что OE — биссектриса угла FOB. Каким углом: острым или тупым — является этот угол?

С—5

1. Из точки O проведены лучи OA, OB и OC (рис. 75), причем $OB \perp OA$. Угол, образованный биссектрисами углов AOB и BOC, равен 20°. Найдите углы AOB, AOC и COB.

2. При пересечении двух прямых образовались четыре угла меньше развернутого. Найдите эти углы, зная, что градусные меры двух из них относятся как 4 : 5.

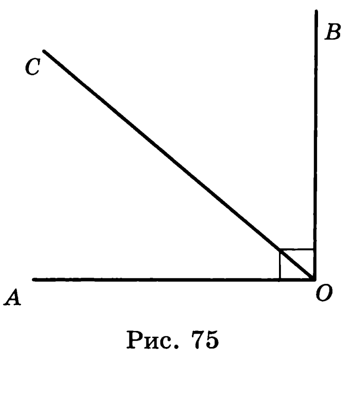

Рис. 75

С—6

1. На рисунке 76 $\triangle ABD = \triangle CDB$, $\angle FAB = 160°$. Найдите $\angle BCD$.

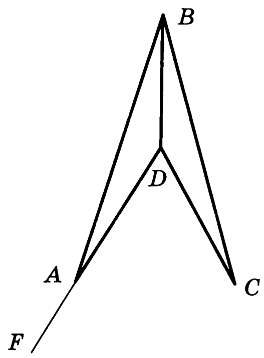

Рис. 76

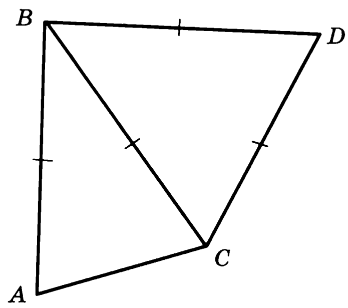

Рис. 77

2. На рисунке 77 $AB = BC$ и $BC = BD = DC$. Периметр треугольника ABC равен 42 см, $AC = 12$ см. Найдите периметр треугольника BDC.

С—7

1. На рисунке 78 $\angle ABE = \angle ECD$, $BE = CE$ и $BK = LC$. Докажите, что $\triangle BEK = \triangle ELC$. Чему равен $\angle ELC$, если $\angle BKE = 110°$?

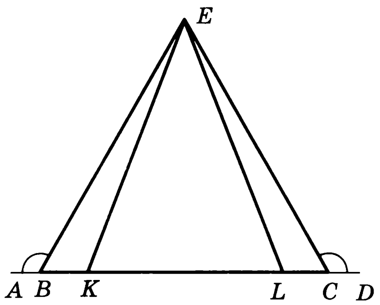

Рис. 78

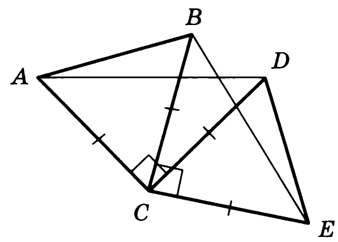

Рис. 79

2. На рисунке 79 $AC = BC = DC = EC$, $AC \perp CD$ и $BC \perp EC$.
   1) Докажите, что $AB = DE$.
   2) Сравните периметры треугольников ABD и EBD.

С—8

1. На рисунке 80 $AD = DC$, $\angle ADB = \angle CDB$. Докажите, что $\angle BAC = \angle BCA$ и $AM = MC$.

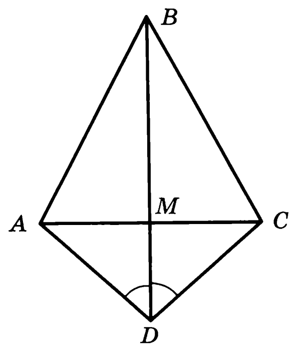

Рис. 80

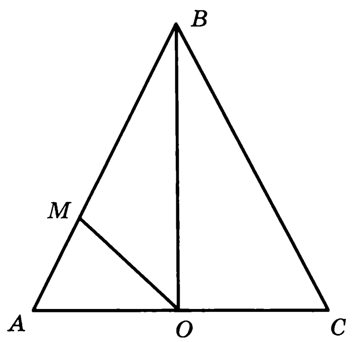

Рис. 81

2. На рисунке 81 $AB = BC$, OM — биссектриса треугольника AOB, $\angle MOC = 135°$. Докажите, что $\angle ABO = \angle OBC$.

С—9

1. На рисунке 82 $AB = BC$, $AF = KC$, $\angle DKA = \angle EFC$. Докажите, что $AD = EC$.

2. На отрезке AC как на основании построены по разные стороны от него два равнобедренных треугольника ABC и ADC. Докажите, что $BD \perp AC$.

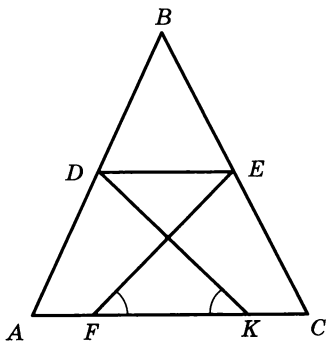

Рис. 82

С—10

Два равнобедренных треугольника ABC и ADC имеют общее основание AC. Вершины B и D расположены по разные стороны от AC. Точка E лежит на отрезке BD, но не лежит на отрезке AC. Докажите, что $\angle EAC = \angle ACE$.

С—11

1. На рисунке 83 $MN = EF$, $OP \perp MN$ и $OD \perp EF$. Докажите, что $OP = OD$.

2. Постройте окружность данного радиуса R, которая проходит через данную точку M и центр которой лежит на данной окружности (точка M не принадлежит данной окружности).

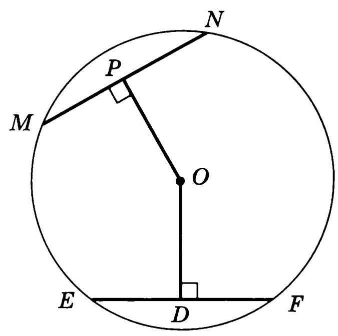

Рис. 83

С—12

1. Начертите произвольный остроугольный треугольник ABC и постройте точку пересечения высоты AD и медианы BM этого треугольника.

2. От данного луча отложите угол, который в полтора раза больше данного угла.

С—13

1. На рисунке 84 $AB = BC$, $\angle A = 30°$, $\angle DCE = \frac{1}{5}\angle BCE$. Докажите, что $AB \parallel CD$.

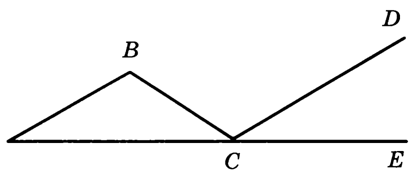

Рис. 84

2. Отрезки BD и AC пересекаются в точке O так, что $AO = OC$ и $BO = OD$. Докажите, что $BC \parallel AD$.

С—14

1. С помощью угольника и линейки через вершины B, A и C треугольника ABC проведите прямые a, b и c, параллельные l (рис. 85). Параллельны ли эти прямые между собой? Пересечет ли эти прямые прямая, проведенная через вершину A и отличная от a? Почему?

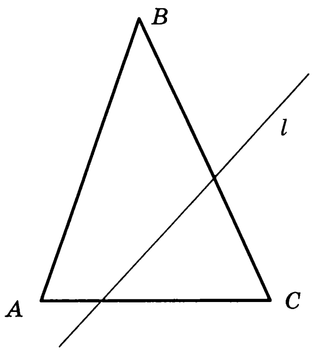

Рис. 85

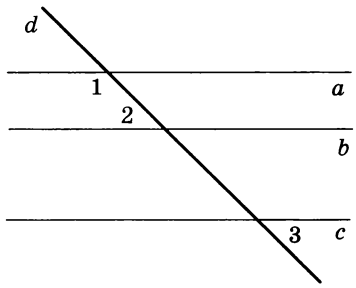

Рис. 86

2. На рисунке 86 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ и $\angle 2 = \angle 3$. Докажите, что $a \parallel c$.

С—15

1. На рисунке 87 $AB \parallel CD$ и $AC = AB$, $\angle BCD = 20°$. Найдите угол CAB.

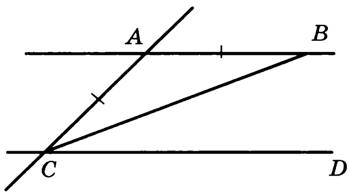

Рис. 87

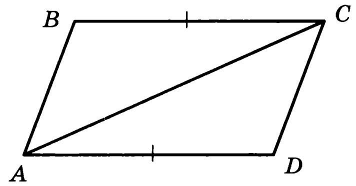

Рис. 88

2. На рисунке 88 $BC = AD$ и $BC \parallel AD$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle ADC$.

С—16

1. Может ли еще один из семи остальных углов, образованных при пересечении прямых a и b с прямой d (рис. 89), быть равен 110°? Равен 60°? Почему?

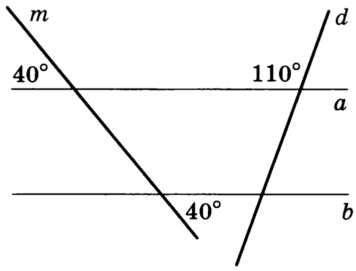

Рис. 89

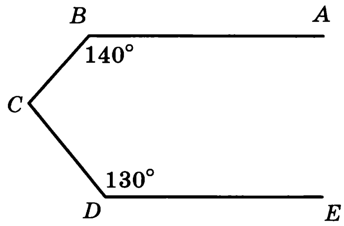

Рис. 90

2. На рисунке 90 $BA \parallel DE$, $\angle CBA = 140°$, $\angle CDE = 130°$. Докажите, что $BC \perp CD$.

С—17

1. Сторона AB треугольника ABC продолжена за точку B. На продолжении отмечена точка D так, что $BC = BD$. Найдите угол ACD, если $\angle ACB = 60°$, $\angle ABC = 50°$.

2. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O, $\angle ABC = 30°$, $\angle AOB = 107°$. Докажите, что треугольник ABC не является остроугольным.

С—18

1. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, CM — медиана треугольника. Докажите, что $\angle CMB > \angle CAB > \angle ACM$.

2. В треугольнике ABC $AC = BC$. Отрезки BC и BA продолжены за вершины C и A. На продолжениях отмечены точки E и D соответственно. Известно, что $DE \parallel AC$. Докажите, что треугольник BDE равнобедренный.

С—19

1. Радиус окружности, изображенной на рисунке 91, равен 6 см. Отрезок AB пересекает окружность, $AO =$ $= 13$ см. Может ли отрезок AB равняться 4 см?

2. Треугольники ABD и BCD расположены по разные стороны от прямой BD; $\angle ADB = \angle BDC$, $\angle ABD =$ $= \angle DBC$. Докажите, что $BD < AB + BC$.

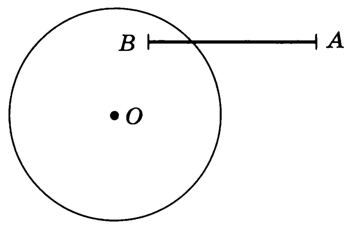

Рис. 91

С—20

1. На рисунке 92 $\angle ABC =$ $= \angle CDE = 90°$, $\angle BAC = 46°$, $\angle CED = 44°$. Докажите, что $BC \perp CD$.

2. В треугольнике ABC $\angle B =$ $= 90°$, CC_1 — биссектриса, $CC_1 = 16$ см, $BC_1 = 8$ см. Найдите внешний угол при вершине A.

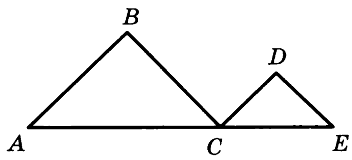

Рис. 92

С—21

1. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки D и E соответственно. Из этих точек опущены перпендикуляры DK и EP к прямой AC, $DK = EP$, $\angle ADK =$ $= \angle PEC$. Докажите, что $AB = BC$.

2. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, причем высота BD треугольника ABC равна высоте B_1D_1 треугольника $A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$. Докажите, что $\angle A = \angle A_1$.

С—22

1. Из точки M к прямой a проведены две наклонные MP и ME и перпендикуляр MK так, что луч MK проходит внутри угла PME. $\angle PEM = 50°$. Сравните отрезки PM и KE.

2. Точка C — середина отрезка AB. Через точки C и B проведены параллельные прямые c и b соответственно так, что прямые AB и b не перпендикулярны.
   а) Докажите, что расстояние от точки A до прямой c равно расстоянию от точки C до прямой b.
   б) Докажите, что расстояние от точки A до прямой b вдвое больше расстояния между прямыми b и c.

С—23*

1. На рисунке 93 точки P и K равноудалены от прямой ME, а точки K и E равноудалены от прямой MP. Докажите, что $\angle MPK = \angle MEK$.

2. Даны прямая a, точка A, взятая на этой прямой, и отрезки OP и KM $(KM > OP)$. Постройте точку B, удаленную от прямой a на расстояние, равное OP, так, чтобы $AB = KM$.

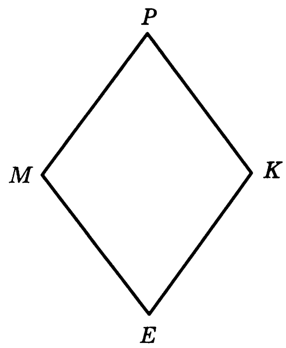

Рис. 93

С—24

1. Даны два острых угла и отрезок. Постройте треугольник, у которого сторона равна половине данного отрезка, а прилежащие к ней углы — двум данным углам.

2. Постройте равнобедренный треугольник по периметру и боковой стороне.

С—25*

1. Постройте остроугольный треугольник по высоте и двум острым углам, которые эта высота образует со сторонами треугольника.

2. Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и высоте, проведенной из вершины прямого угла.

С—26

На рисунке 94 $\angle EPM = \angle PMK = 90°$, $\angle MEP = \angle MKP = 30°$, $ME = 10$.

1) Докажите, что прямые EM и KP не имеют общих точек.

2) Между какими целыми числами заключена длина отрезка EP?

3) Найдите длину медианы MD треугольника PMK.

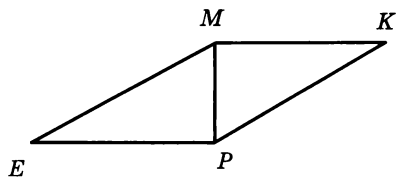

Рис. 94

ВАРИАНТ 5

С—1

1. Начертите две пересекающиеся прямые и расположите на них два отрезка, не имеющие общих точек.
2. Сколько точек надо взять между точками A и B, чтобы вместе с отрезком AB получилось шесть различных отрезков?
3. Даны отрезок AB, точка E, не лежащая на прямой AB, и точка C, лежащая на прямой AB. Каково взаимное положение прямой EC и отрезка AB?
4. Можно ли провести прямую, не проходящую через точку A, так, чтобы она пересекла одновременно прямые AB, AC и AD (рис. 95)?

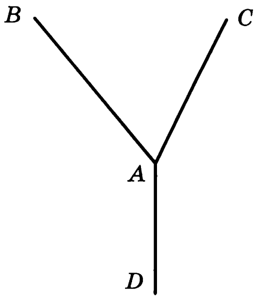

Рис. 95

С—2

1. Сколько неразвернутых и сколько развернутых углов изображено на рисунке 96?

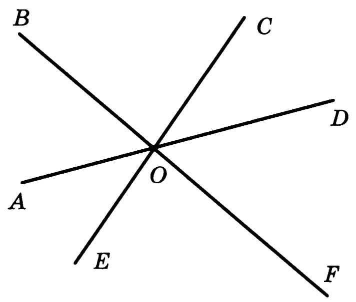

Рис. 96

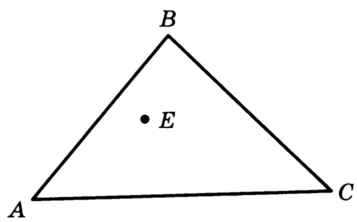

Рис. 97

2. С началом в точке E (рис. 97) проведите лучи, один из которых пересекает луч CA, а другой не пересекает луч BC (рис. 97). Рассмотрите возможные варианты.
3. Дан неразвернутый угол ABC. Проведите лучи с началом в точке B, чтобы образовались при этом шесть углов, из которых один был бы развернутым.

С—3

1. Если на прямой даны точки A, B, C и D (точка C лежит между A и B) так, что $AB = CD$, то является ли середина отрезка AD также серединой отрезка BC? Обоснуйте ответ.

2. На рисунке 98 OB — луч, принадлежащий внутренней области угла AOC. Как нужно провести луч OE, чтобы $\angle AOC = \angle BOE$? Покажите на рисунках возможные варианты.

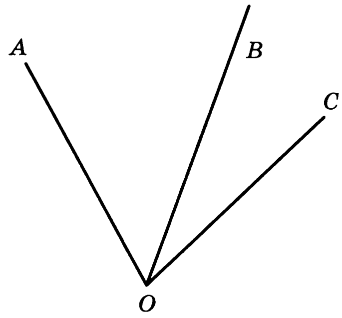

Рис. 98

С—4

1. На отрезке AB, равном 192 дм, дана точка C, такая, что $AC : CB = 1 : 3$. На отрезке AC отложен отрезок CD, равный $\frac{1}{12}BC$. Найдите расстояние между серединами отрезков AD и CB.

2. Угол AOB расположен во внутренней области угла COD. OE и OF — биссектрисы углов COA и BOD соответственно. Объясните, почему угол EOF прямой, если $\angle COD + \angle AOB = 180°$.

С—5

1. Даны два угла AOB и COD с общей вершиной. Стороны одного угла перпендикулярны к сторонам другого (рис. 99). Найдите эти углы, если разность между ними равна прямому углу.

2. Углы AOB и BOC смежные, OM — биссектриса угла AOB, луч ON принадлежит внутренней области угла BOC и перпендикулярен OM. Является ли ON биссектрисой угла BOC? Почему?

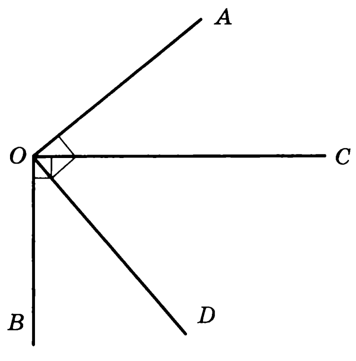

Рис. 99

С—6

1. На рисунке 100 $\triangle ABD = \triangle CBD$, $AD = DC$, $\angle ABC = 110°$, $\angle BAD = 90°$. Найдите угол ABD и докажите, что $BC \perp CD$.
2. В треугольнике ABC $AB = BC$, $AC = 8$ см, $E \in BC$, причем $BE = EC$. Точка E делит периметр треугольника ABC на две части, из которых одна больше другой на 2 см. Найдите AB.

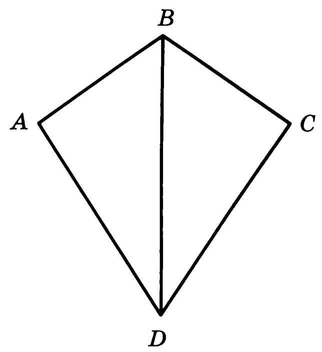

Рис. 100

С—7

1. На рисунке 101 $OA = OC$ и $\angle AOB = \angle BOC$. Докажите, что $\triangle ABK = \triangle CBK$.
2. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$, $D \in BC$ и $DC = 2BD$, $D_1 \in B_1C_1$ и $D_1C_1 = 2B_1D_1$. Докажите, что $AD = A_1D_1$.

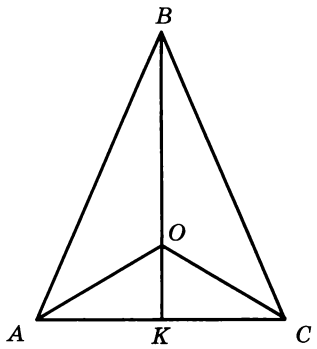

Рис. 101

С—8

1. На рисунке 102 $AB = BC$ и $AE = FC$. Докажите, что $\angle AEC = \angle AFC$.
2. В треугольнике ABC на продолжении стороны BC за точку C отложен отрезок CD, равный CA, и точки A и D соединены отрезком, CE — биссектриса треугольника ACB, а CF — медиана треугольника ACD. Докажите, что $CF \perp CE$.

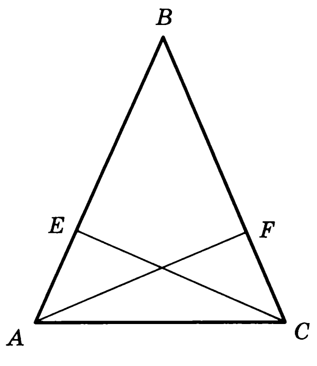

Рис. 102

С—9

1. На рисунке 103 $\angle A = \angle D$, $\angle 1 = \angle 2$, $AB = CD$, $EC = 10$ см, $\angle AEC = 90°$. Найдите высоту треугольника BKD, опущенную из вершины B.

2. Отрезок прямой AB точками P и Q делится на три равные части. Вне отрезка AB по одну сторону от него взяты точки C и D так, что $AC = BD$ и $CQ = DP$, $\angle DPB + \angle CQA = 140°$. Найдите углы DPB и CQA.

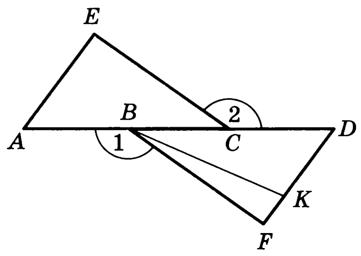

Рис. 103

С—10

Два прямоугольных треугольника BOK и COL, где углы BOK и COL прямые, имеют общую вершину O (рис. 104), причем $O—A—K$, $O—D—L$, $\angle KAB = \angle CDL$, $AO = OD$ и $AK = DL$. Докажите, что $KB = CL$.

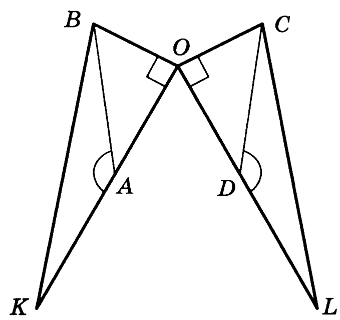

Рис. 104

С—11

1. На рисунке 105 $AB = CD$. Докажите, что $AC = BD$.

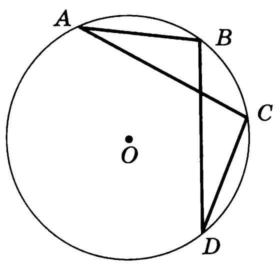

Рис. 105

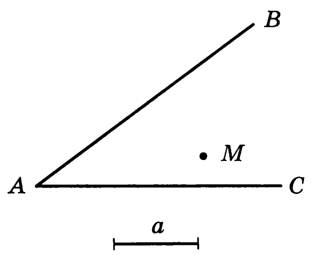

Рис. 106

2. На сторонах угла BAC найдите точки, удаленные от точки M на заданное расстояние a (см. рис. 106). Рассмотрите возможные случаи в зависимости от длины отрезка a.

С—12

1. 1) Постройте угол, равный 135°.

   2) От его вершины A на сторонах отложите два равных отрезка AB и AC и постройте окружность, проходящую через точки A, B и C.

2. Дан треугольник ABC. На прямых AC и BC постройте точки X и Y, такие, что $XA = XB$ и $YA = YB$ (рис. 107).

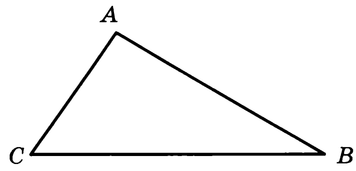

Рис. 107

С—13

1. На рисунке 108 $\angle 1 = \angle 2$, $BC = EF$, $AD = CF$. Докажите, что $AB \parallel DE$.

2. На рисунке 109 $\angle 1 = \angle 2$, $BD \perp AC$, AC — биссектриса угла BAE. Докажите, что $BC \parallel AE$.

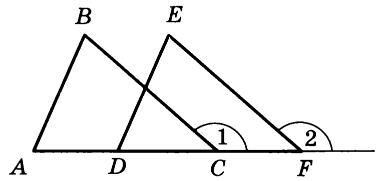

Рис. 108

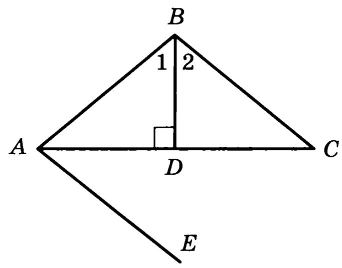

Рис. 109

С—14

1. С помощью циркуля и линейки через вершину C треугольника ABC проведите прямую, параллельную AB.

2. Используя данные, приведенные на рисунке 110, выясните, пересекает ли прямая a прямую DE. Ответ поясните.

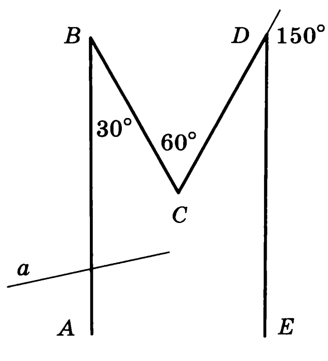

Рис. 110

С—15

1. На рисунке 111 $AB = BD = BC$, $BE \parallel DC$. Докажите, что $DC \perp AC$.

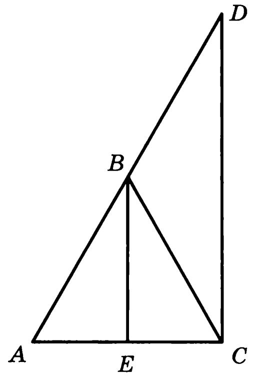

Рис. 111

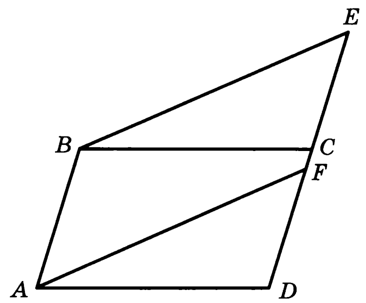

Рис. 112

2. На рисунке 112 $BE \parallel AF$, $AB \parallel DE$, $AB = CD$. Докажите, что $\triangle BCE = \triangle ADF$.

С—16

1. На рисунке 113 $\angle BED = 70°$, $\angle EDC = 20°$, $AB \parallel CD$. Найдите угол ABC.

2. Внутри треугольника ABC отмечена точка F. Через нее проведены прямые, параллельные сторонам AC и AB и пересекающие сторону BC соответственно в точках M и E, $FM = MC$, $FE = EB$. Докажите, что F — точка пересечения биссектрис треугольника ABC.

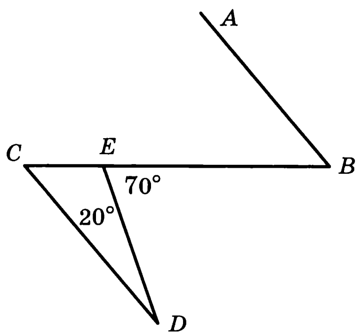

Рис. 113

С—17

1. На сторонах угла A, равного 45°, отмечены точки B и C, а во внутренней области угла — точка D так, что $\angle ABD = 95°$, $\angle ACD = 90°$. Найдите угол BDC.

2. В треугольнике ABC $\angle B = 60°$. Внутри треугольника отмечена точка O, равноудаленная от его вершин. Докажите, что треугольник AOC является тупоугольным.

С—18

1. В треугольнике ABC BD — медиана, $\angle ABD < \angle BAC + \angle BCA$. Докажите, что $BD > 0{,}5BC$.
2. Дан треугольник ABC. Прямая CD параллельна биссектрисе внешнего угла треугольника при вершине B и пересекает сторону AB в точке D. Из точки D к прямой BC проведен перпендикуляр DK. Сравните отрезки DK и BC.

С—19

1. В треугольнике ABC BB_1 — медиана. Докажите, что $BB_1 < 0{,}5\,(AB + BC)$.
2. В треугольнике ABC $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 70^\circ$. Из вершины C вне треугольника проведен луч CD так, что угол BCD равен $109^\circ 59'$. Может ли выполняться равенство $AD = AC + CD$?

С—20

1. В треугольнике ABC угол ACB тупой. Продолжения высот AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle ABC = \angle AOC$ и $\angle OAC = \angle OBC$.
2. В треугольнике ABC $\angle C = 90^\circ$, CD — высота треугольника, $BC = 2BD$. Докажите, что $AD = 3DB$.

С—21

1. Через середину стороны AB треугольника ABC проведена прямая, перпендикулярная к AB, пересекающая BC в точке E. $BC = 24$ см, периметр треугольника AEC равен 30 см. Найдите AC.
2. Две биссектрисы треугольника пересекаются в точке O. Докажите, что третья биссектриса проходит через точку O.

С—22

1. Из точки A к некоторой прямой проведены перпендикуляр AB и наклонная AC, а из точки D — наклонная DE так, что отрезки DE и AB пересекаются в точке O, $OD = OB$, $\angle OAD + \angle BOE = 90^\circ$. Сравните отрезки AC и DE.
2. В треугольнике ABC $\angle A = 70^\circ$, $\angle B = 80^\circ$, BE — биссектриса. Через точку E проведена прямая a, параллельная BC, $EC = x$.
   а) Найдите расстояние между прямыми a и BC.
   б) Найдите расстояние от точки E до прямой AB.

С—23*

1. На рисунке 114 точки B и C равноудалены от прямой AD, $BO = OC$. Докажите, что треугольники ABC и CBD равны.

2. Даны неразвернутый угол и отрезок. Внутри данного угла постройте точку, удаленную от сторон угла на расстояние, равное данному отрезку.

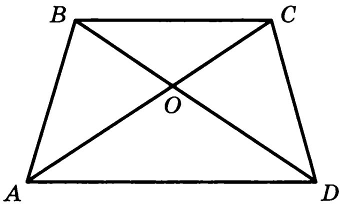

Рис. 114

С—24

1. Постройте треугольник ABC со стороной AB, равной данному отрезку, и с углами A и C, равными $60°$ и $105°$ соответственно.

2. В треугольнике ABC биссектрисы BB_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Постройте треугольник ABC по отрезкам OB_1, OC, B_1C.

С—25*

1. Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из этих сторон. Всегда ли эта задача имеет решение?

2. Постройте треугольник по углу и двум высотам, проведенным к сторонам этого угла.

С—26

На рисунке 115 $AB = BC = CD = DA$.

1) Докажите, что $AB \parallel CD$, $AD \parallel BC$.
2) Докажите, что $BT = DT$.
3) Докажите, что $AC > DB$, если $\angle TBC = 90°$ и $TC > AT$.
4) Докажите, что точка T равноудалена от прямых AB и AD.

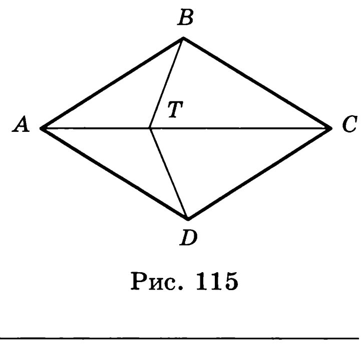

Рис. 115

ВАРИАНТ 6

С—1

1. Начертите две пересекающиеся прямые и расположите на них два непересекающихся отрезка так, чтобы точка пересечения прямых принадлежала одному из них.
2. Проведите прямую, которая пересекает некоторые из указанных на рисунке 116 отрезков, так, чтобы вместе с данными отрезками образовалось шесть отрезков.

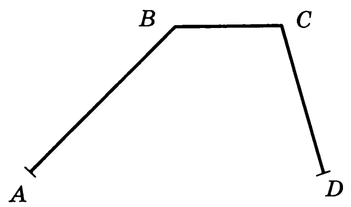

Рис. 116

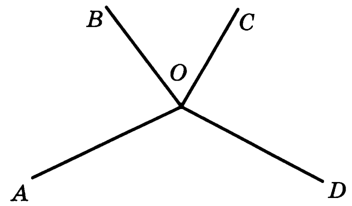

Рис. 117

3. Дана прямая EF, $A \notin EF$, $B \notin EF$. Может ли прямая AB не пересекать отрезок EF?
4. Может ли прямая, не проходящая через точку O, одновременно пересекать прямые OA, OB, OC и OD (рис. 117)?

С—2

1. Сколько неразвернутых и сколько развернутых углов изображено на рисунке 118?

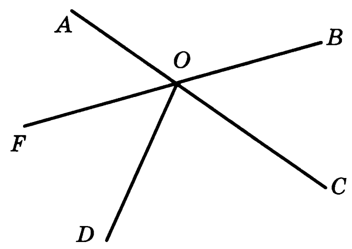

Рис. 118

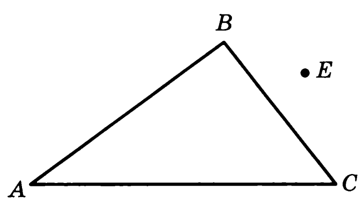

Рис. 119

2. С началом в точке E проведите лучи, один из которых пересекает луч BC, а другой не пересекает луч AC (рис. 119). Рассмотрите возможные варианты.
3. Через заданную точку проведите столько прямых, чтобы при их пересечении образовалось шесть углов.

С—3

1. AB и AC — отрезки одной прямой (A лежит между точками B и C), точка M — середина отрезка AB, N — середина AC. Верно ли, что $BC = 2MN$? Ответ обоснуйте.
2. На рисунке 120 OC — луч, принадлежащий внутренней области угла AOB. Как нужно провести луч OD, чтобы $\angle AOD = \angle COB$? Покажите на рисунке возможные варианты.

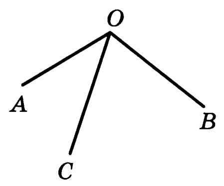

Рис. 120

С—4

1. На прямой отложены два равных отрезка AC и CB. На отрезке CB дана точка D, такая, что $5CD = 4DB$. Найдите длину отрезка, концами которого являются середины отрезков AC и DB, если $CD = 12$ м.
2. Угол AOB принадлежит внутренней области угла COD; $\angle COD = 140°$, а $\angle AOB = 100°$. Найдите угол, образованный биссектрисами углов AOC и BOD, если луч OB принадлежит внутренней области угла AOD.

С—5

1. Два равных тупых угла имеют общую сторону, а две другие стороны взаимно перпендикулярны. Найдите величину тупого угла.
2. Из вершины развернутого угла проведены два луча, которые делят его на три равные части. Покажите, что биссектриса среднего угла перпендикулярна сторонам развернутого угла.

С—6

1. На рисунке 121 $\triangle ABE = \triangle ECD$, $\angle ABE = \angle CDE$, $AE = 7$ см, $AB \perp AC$. Найдите AC и $\angle ECD$.
2. В треугольнике ABC $AB = BC = 12$ мм. Точка M лежит на стороне BC, причем $BM = MC$. Точка M делит периметр треугольника ABC на две части, из которых одна меньше другой на 3 мм. Найдите сторону AC.

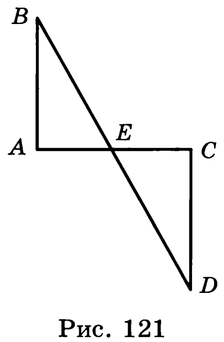

Рис. 121

С—7

1. На рисунке 122 $OA = OC$ и $\angle AOD = \angle COD$. Докажите, что $\triangle ABD = \triangle CBD$.

2. Даны треугольники DEF и $D_1E_1F_1$, точки M и M_1 лежат соответственно на сторонах DF и D_1F_1, причем $DM = 3MF$ и $D_1M_1 = 3M_1F_1$, $DE = D_1E_1$, $EM = E_1M_1$ и $\angle DEM = \angle D_1E_1M_1$. Докажите, что $EF = E_1F_1$.

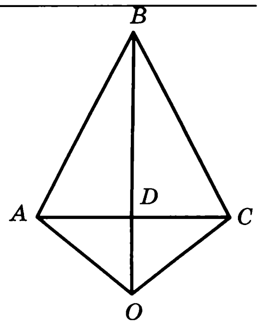

Рис. 122

С—8

1. На рисунке 123 $AE = EC$ и $BE = ED$. Докажите, что $\angle ACD = \angle CAB$.

2. На отрезке AC по разные стороны от него построены два равнобедренных треугольника ABC и ADC. Вершины этих треугольников соединены прямой BD. Докажите, что $BD \perp AC$.

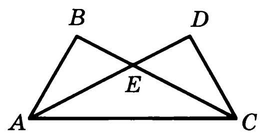

Рис. 123

С—9

1. На рисунке 124 $\angle BAC = \angle F$, $\angle 1 = \angle 2$, $AD = CF$, $\angle E = 90°$, $EF = 15$ дм. Найдите высоту треугольника AMC, проведенную из вершины A.

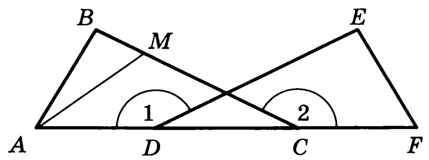

Рис. 124

2. Отрезок прямой EF точками K и L делится на три равные части. Вне отрезка EF по разные стороны от прямой EF взяты точки A и B так, что $AE = BF$ и $AL = BK$. Градусные меры углов AEL и KFB относятся как $m : 1$. Найдите m.

С—10

Отрезки AD и BE пересекаются в точке C, $\angle BAC = \angle DEC$. Углы, смежные с углами ABC и CDE, равны между собой, $AB = DE$. Докажите, что $\triangle ABE = \triangle ADE$ (рис. 125).

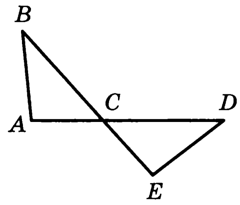

Рис. 125

С—11

1. На рисунке 126 $AC = BD$. Докажите, что $AB = CD$.

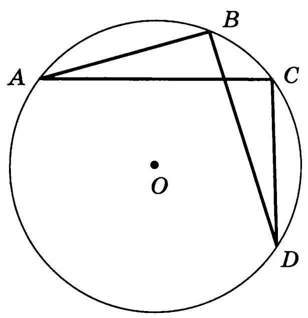

Рис. 126

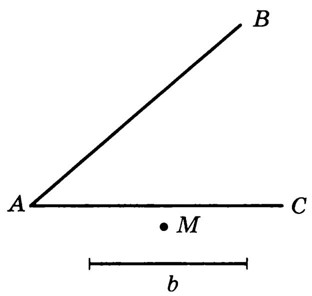

Рис. 127

2. На сторонах угла BAC постройте точки, удаленные от точки M на заданное расстояние b (рис. 127). Рассмотрите возможные случаи в зависимости от длины отрезка b.

С—12

1. 1) Постройте угол, равный 45°.
   2) От его вершины B на сторонах отложите отрезки BA и BC, такие, что $BA = 2BC$. Постройте окружность, проходящую через точки A, B и C.
2. Дан треугольник FEK (рис. 128). На прямых EK и FK постройте точки M и N, такие, что $ME = MF$ и $NE = NF$.

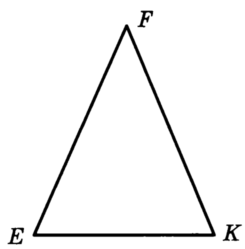

Рис. 128

С—13

1. На рисунке 129 $\angle 1 = \angle 2$, $ED = BC$, $EF = AC$. Докажите, что $EF \parallel AC$.

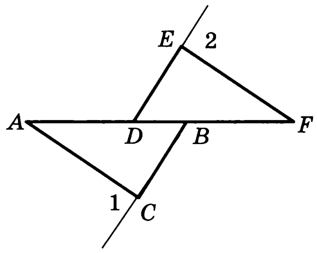

Рис. 129

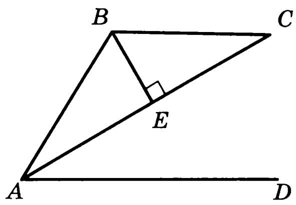

Рис. 130

2. На рисунке 130 AC — биссектриса угла BAD, $BE \perp AC$ и $AE = EC$. Докажите, что $AD \parallel BC$.

С—14

1. С помощью циркуля и линейки постройте прямую, параллельную одной стороне треугольника и проходящую через середину одной из двух других его сторон.
2. На рисунке 131 прямая m пересекает прямую DE. Пересекает ли эта прямая прямую AB? Ответ поясните.

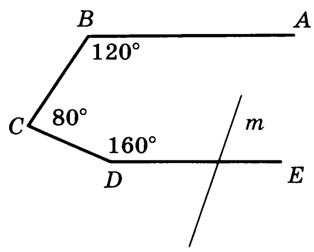

Рис. 131

С—15

1. На рисунке 132 $AB = AC$, $AD = DE$, $DE \parallel AC$. Докажите, что $AE \perp BC$.

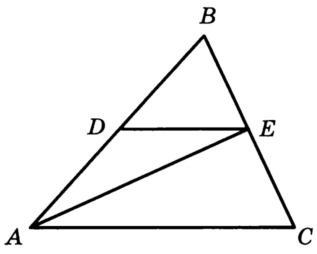

Рис. 132

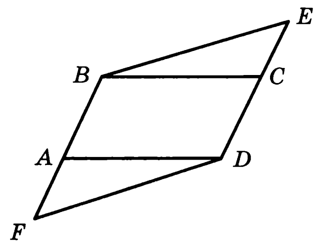

Рис. 133

2. На рисунке 133 $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$, $DF \parallel BE$. Докажите, что $\triangle FAD = \triangle CBE$.

С—16

1. На рисунке 134 $AB \parallel CD$, $\angle ABC = 30°$, $\angle CDE = 40°$. Найдите угол BED.

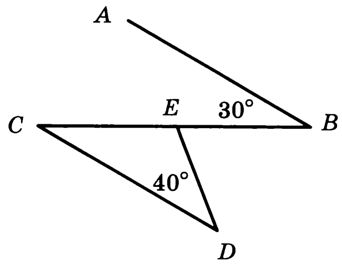

Рис. 134

2. Внутри треугольника ABC выбрана точка M. Через нее проведена прямая, параллельная AC и пересекающая стороны AB и BC соответственно в точках D и E, причем $MD = AD$ и $ME = EC$. Докажите, что M — точка пересечения биссектрис треугольника.

С—17

1. На сторонах угла A, равного 127°, отмечены точки B и C, а внутри угла — точка D так, что $\angle ABD = 25°$, $\angle ACD = 19°$. Найдите угол BDC.

2. Треугольники ABC и DAC имеют общую сторону AC. Отрезок BD пересекает отрезок AC. Известно, что $BD = AD = CD$. Докажите, что треугольник ADC является тупоугольным, если $\angle ABC = 130°$.

С—18

1. В треугольнике ABC BD — медиана, $AB > 2BD$. Докажите, что $\angle BAC + \angle BCD < \angle DBC$.

2. В треугольнике ABC через вершину C проведена прямая, параллельная биссектрисе BD и пересекающая прямую AB в точке K. BE — высота треугольника ABC. Сравните отрезки BE и BK.

С—19

1. В треугольнике ABC BB_1 — медиана. Докажите, что $BB_1 > 0,5\ (AB - BC)$.

2. В треугольнике ABC $\angle A = 35°$, $\angle B = 71°$. На продолжении стороны AC за вершину C взята точка D. Из вершины C проведен луч CE так, что точки E и B лежат по разные стороны от прямой AD и $\angle ECD = 74°1'$. Может ли выполняться равенство $BE + CE = BC$?

С—20

1. В треугольнике ABC угол B тупой. Продолжения высот AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что $\angle ABC = 180° - \angle AOC$.

2. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$, BD — высота, $AB = 2BD$. Докажите, что $3AC = 4AD$.

С—21

1. Через точку K, взятую на стороне AB треугольника ABC, проведена прямая, перпендикулярная AB и пересекающая сторону AC в точке D. Известно, что $\angle KDB = \angle KDA$, $AC = 30$ см, $BC = 15$ см. Найдите периметр треугольника BDC.

2. Докажите, что биссектриса угла A треугольника ABC проходит через точку пересечения прямых, содержащих биссектрисы внешних углов при вершинах B и C.

С—22

1. Из точки M к прямой a проведен перпендикуляр MP, а из точки K — наклонная KH. Отрезки MP и KH пересекаются в точке O, $OH = OM$, $\angle OMK < \angle OHP$. Докажите, что отрезок HK меньше любой наклонной, проведенной из точки M к прямой a.

2. В треугольнике ABC проведена медиана BM, $AM = BM = MC = x$. Через точку M проведена прямая, параллельная прямой BC.
   а) Найдите расстояние от точки A до прямой BC.
   б) Найдите расстояние между прямыми a и BC.

С—23*

1. На рисунке 135 точки M и T равноудалены от прямой PK. $\angle KMT = \angle PTM$. Докажите, что треугольники PMK и PKT равны.

2. Даны прямая a, точка A, не лежащая на данной прямой, и некоторый отрезок. (Точка A удалена от прямой a на расстояние, меньшее удвоенной длины данного отрезка.) Постройте точки, удаленные от прямой a и точки A на расстояние, равное данному отрезку.

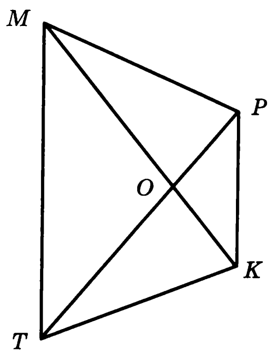

Рис. 135

С—24

1. Постройте треугольник ABC со сторонами AB и AC, равными соответственно данным отрезкам, так, чтобы $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$.

2. В треугольнике ABC высоты пересекаются в точке O. Постройте этот треугольник по отрезкам OA, BO, AB.

С—25*

1. Постройте треугольник по двум углам и стороне, противолежащей одному из этих углов. Всегда ли эта задача имеет решение?

2. Постройте остроугольный треугольник по углу и двум высотам, одна из которых проведена из вершины угла, а другая опущена на одну из его сторон.

С—26

На рисунке 136 $KT = TM = MP = PK$.

1) Докажите, что $TM \parallel KP$ и $KT \parallel PM$.

2) Докажите, что $TO = OP$.

3) Докажите, что $TP > KM$, если $\angle OTK = 44°$ и $KO > OM$.

4) Докажите, что точка O равноудалена от прямых TM и MP.

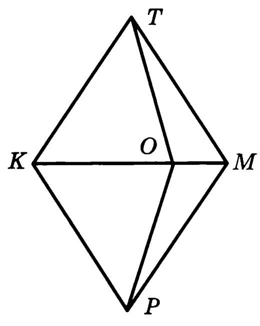

Рис. 136

ВАРИАНТ 7

С—1

1. Сколько различных прямых можно провести через четыре точки? Сделайте чертежи.
2. По рисунку 137 определите число отрезков с концами в обозначенных точках.

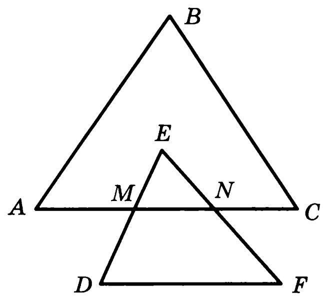

Рис. 137

С—2

Углы AOB, BOC, COD, DOE и EOA имеют общую вершину O. Прямая a, не проходящая через точку O, пересекает не менее двух лучей, которые являются сторонами этих углов. Рассмотрите все возможные случаи. Сделайте чертежи.

С—3

1. На прямой a от точки A отложены два отрезка AB и AC, причем $AB < AC < 1{,}99AB$. Сравните отрезки BC и AB. Ответ обоснуйте.
2. На рисунке 138 $\angle AOC = \angle BOD$, OM и ON — биссектрисы углов AOB и COD. Сравните углы MON и AOC.

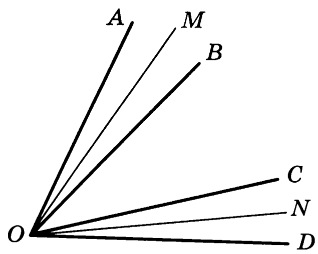

Рис. 138

С—4

1. Длина отрезка AB равна 14 см. Найдите на прямой AB все такие точки D, для которых $DA = 3DB$.
2. Прямой угол разделен лучом, исходящим из его вершины, на два угла, такие, что половина одного угла равна трети другого. Найдите эти углы.

С—5

Докажите, что сумма каждых трех углов, не прилежащих один к другому и образуемых тремя прямыми, проходящими через одну точку, равна двум прямым углам.

С—6

1. В треугольнике ABC $AB = AC$. Внутри треугольника выбрана точка O так, что $\angle AOB = \angle AOC$, $\angle AOB = 120°$. Докажите, что AO — биссектриса угла BAC, и найдите угол BOC.
2. На рисунке 139 $\triangle ABC = \triangle ADC$, $AB = CD = 20$ см, $BO = DO = 5$ см. Периметр треугольника ABC равен 50 см. Найдите периметр треугольника AOC, если AO больше AC на 15 см.

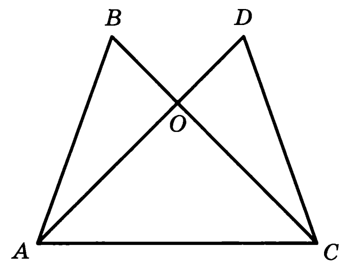

Рис. 139

С—7

На рисунке 140 $CO = OD$ и $AO = OB$, M — середина отрезка AB. Докажите, что $MC = MD$.

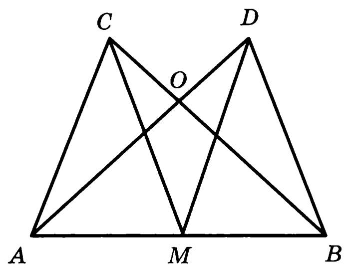

Рис. 140

С—8

В треугольнике ABC $AB = BC = AC$. На его сторонах взяты точки M, P и K так, что $AM : MB = BP : PC = CK : KA = 1 : 3$. Докажите, что треугольник MPK равносторонний.

С—9

1. На одной стороне угла с вершиной A отмечены точки D и B, на другой стороне — C и E так, что $AD = AC = 3$ см, $AB = AE = 4$ см. Докажите, что:
   а) $BC = ED$;
   б) $KB = KE$, где K — точка пересечения отрезков BC и ED.
2. ABC и $A_1B_1C_1$ — равнобедренные треугольники с основаниями AC и A_1C_1, точки M и M_1 — середины сторон BC и B_1C_1, $AB = A_1B_1$, $AM = A_1M_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

С—10

В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $AB + AC = A_1B_1 + A_1C_1$, BD и B_1D_1 — медианы этих треугольников. Докажите, что $BD = B_1D_1$.

С—11

Отрезок BD — высота треугольника ABC. От вершины B на прямой CB по обе стороны от точки B отложены отрезки BE и BK, равные AB. На AC от точки D отложен отрезок DF, равный DA. Докажите, что точки A, E, K и F лежат на одной окружности.

С—12

1. Постройте точку, равноудаленную от точек A и B и удаленную от точки C на расстояние, равное PQ (рис. 141). Выясните число решений этой задачи в зависимости от расположения данных точек и длины отрезка PQ.
2. Как с помощью циркуля и линейки можно разделить угол в 54° на три равные части?

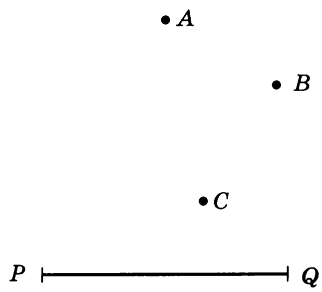

Рис. 141

С—13

На рисунке 142 $AM = MD$, $DE = DF$ и $AE = AF$. Докажите, что $MD \parallel AF$.

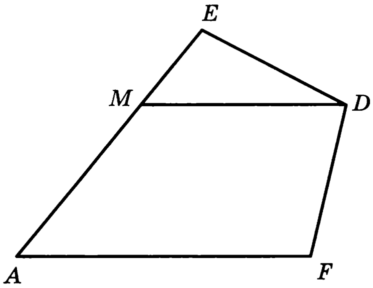

Рис. 142

С—14

1. На рисунке 143 $AB = CD$ и $BC = DE$, $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$. Докажите, что точки A, C и E лежат на одной прямой.

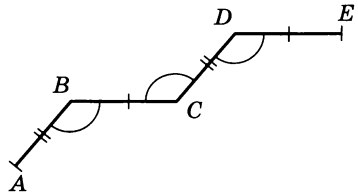

Рис. 143

2. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) BD — медиана. Пусть M — середина BC. Пользуясь циркулем и линейкой, постройте прямую, проходящую через точку M и параллельную BD.

С—15

На прямой MN между точками M и N выбрана точка A и проведены по одну сторону от MN лучи AB, AC и AD. На луче AB выбрана точка K и через нее проведена прямая, параллельная MN и пересекающая лучи AC и AD соответственно в точках P и E, $KP = PA = PE$. Докажите, что $AB \perp AD$.

С—16

На рисунке 144 BD — медиана треугольника ABC, причем $AB = 2BD$. Докажите, что BC — биссектриса угла DBF.

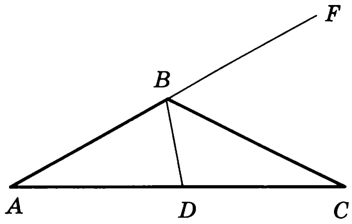

Рис. 144

С—17

1. В треугольнике ABC угол B тупой. Внутри треугольника отмечены точки O и P. На луче PC вне треугольника взята точка D. Существует ли расположение точек O и P, при котором $\angle ABO \geqslant \angle ACD$?
2. В треугольнике ABC $AC = BC$, D — точка пересечения биссектрис треугольника, а O — точка, равноудаленная от всех вершин треугольника. Известно, что отрезок OD пересекает сторону AB в точке E и точкой пересечения делится пополам. Найдите углы треугольника ABC.

С—18

1. Отрезки AC и BD пересекаются во внутренней точке так, что $AB > AC$. Докажите, что $BD > CD$.
2. В треугольнике ABC медианы пересекаются в точке M. Известно, что $\angle MAB = \angle MBA$, $\angle MCB = \angle MBC$. Найдите угол ABC.

С—19

1. Докажите, что сумма двух медиан треугольника больше полусуммы двух сторон, к которым эти медианы проведены.
2. Внутри равностороннего треугольника ABC отмечена точка E. Докажите, что $EA < EB + EC$.

С—20

1. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 40°$. На сторонах AB и BC отмечены точки D и E соответственно, $\angle EAD = 5°$, $\angle ECD = 10°$. Найдите $\angle EDC$.

2. На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC взята точка E, а внутри треугольника — точка D. Перпендикуляр EM к прямой AC делит катет AC пополам, $\angle B = 45°$, $\angle CDA = 90°$, $\angle DCA = 60°$. Докажите, что $EM = DC$.

С—21

1. В треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 равны, $AC_1 = BA_1$. Найдите угол B.

2. На рисунке 145 $\angle ABC = 35°$, $\angle BAC = 55°$, $\angle AM_1M = 90°$. Точки A_1 и B_1 — середины отрезков BC и AC соответственно, $AA_1 = AM$, $BB_1 = B_1K$. Докажите, что $AM_1 = BA_1$.

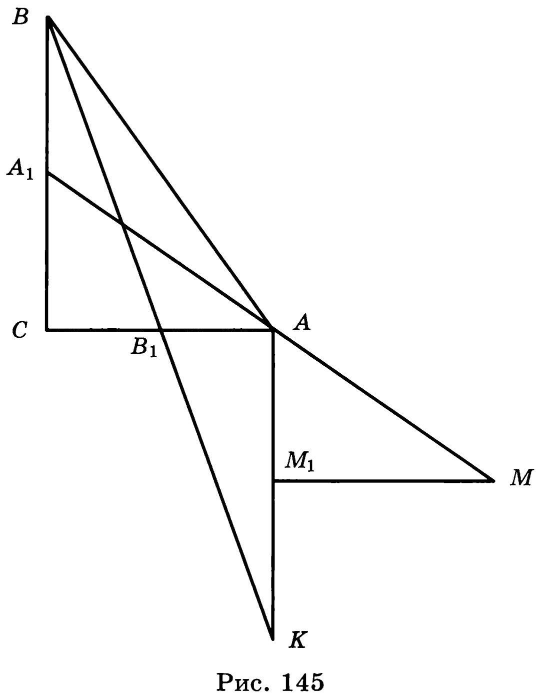

Рис. 145

С—22

1. Из точки A к некоторой прямой проведены наклонные AB и AC и перпендикуляр AD так, что точка C является серединой отрезка BD. Может ли выполняться неравенство $AB > 2AC$?

2. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$. На стороне AB взята точка M так, что $AB = 3AM$. Через точку M проведена прямая a, параллельная AC. Докажите, что расстояние от точки B до прямой a вдвое больше расстояния между прямыми a и AC.

С—23*

1. На рисунке 146 точки B и E равноудалены от прямой AD, а точки C и M — середины отрезков AD и BC соответственно. Докажите, что $BC = ED$.

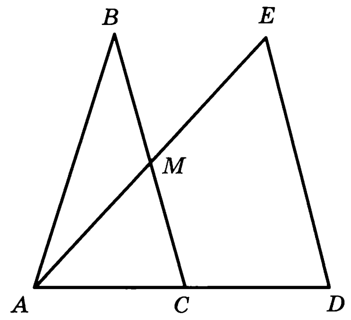

Рис. 146

2. Даны две точки A и B, отрезок PO. Постройте точки, удаленные от прямой AB на расстояние PO и равноудаленные от концов отрезка AB.

С—24

1. Даны прямая a и отрезок AB, пересекающий эту прямую. Постройте на прямой a точку C так, чтобы эта прямая содержала биссектрису угла треугольника ABC.

2. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M, P, K так, что $MK \parallel BC$, $PK \parallel AB$. Как построить треугольник ABC по отрезкам KM, KB, KP и углу PKC?

С—25*

1. На стороне AC треугольника ABC взята точка M. Постройте треугольник ABC по отрезкам AB, BM и углам AMB, BCM.
2. Постройте остроугольный треугольник ABC по сумме углов B и A, высоте BD и стороне AC.

С—26

На окружности с центром O последовательно отмечены точки A, B, C, D так, что прямые AD и BC параллельны, точка O лежит между ними, $AD > BC$ и $\angle OBA = \angle OCD$.

1) Докажите, что $\angle AOB = \angle COD$.
2) Докажите, что $AC = BD$.
3) Докажите, что $\angle DBC = \angle CAD$.
4) Сравните расстояния от точки O до прямых AD и BC.

ВАРИАНТ 8

С—1

1. Сколько точек пересечения могут иметь четыре попарно пересекающиеся прямые? Для каждого случая сделайте рисунок.
2. По рисунку 147 определите число отрезков с концами в обозначенных точках.

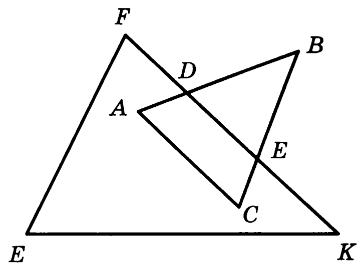

Рис. 147

С—2

Углы MAF, FAK, KAP, PAQ, QAM имеют общую вершину A. Прямая m, не проходящая через точку A, пересекает не более трех лучей, которые являются сторонами этих углов. Рассмотрите все возможные случаи. Сделайте рисунки.

С—3

1. На прямой m от точки A отложены два отрезка AB и AC, причем $0{,}51AB < AC < AB$. Сравните отрезки BC и AC. Ответ обоснуйте.
2. На рисунке 148 OM и ON — биссектрисы углов AOB и COD, $\angle MON = \angle AOC$. Сравните углы AOC и BOD.

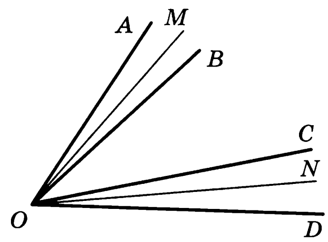

Рис. 148

С—4

1. Длина отрезка AB равна 12 см. Найдите на прямой AB все такие точки M, для которых $MA = 2MB$.
2. Прямой угол двумя лучами, исходящими из его вершины, разделен на три угла, один из которых равен разности двух других углов. Найдите величину большего из этих углов.

С—5

Докажите, что сумма каждых пяти углов, не прилежащих один к другому и образуемых пятью прямыми, проходящими через одну точку, равна двум прямым углам.

С—6

1. В треугольнике ABC выбрана точка O так, что $\triangle AOB = \triangle COB$, $OA = OC$, $\angle AOC = 140°$. Докажите, что BO — биссектриса угла ABC, и найдите угол AOB.
2. На рисунке 149 $\triangle AOM = \triangle FOE$, $\angle AMO = \angle AEF$. Периметр треугольника OEF равен 40 см, $AF = 20$ см. Найдите периметр треугольника AEF.

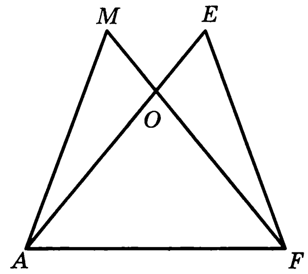

Рис. 149

С—7

На рисунке 150 $AO = OB$, $OD = OC$ и $DE = CF$. Докажите, что $AE = BF$.

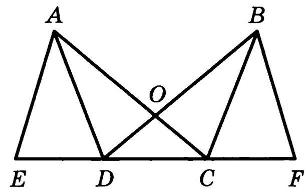

Рис. 150

С—8

Стороны равностороннего треугольника ABC продлены на отрезки AM, CP и BK так, что $MA : AB = PC : AC = BK : CB = 2 : 1$. Докажите, что треугольник MPK равносторонний.

С—9

1. На одной стороне угла с вершиной B отмечены точки M и O, на другой — K и P так, что $BM = BP$, $BO < BM$, $BK < BP$, а $\angle OPB = \angle KMB$. Докажите, что:
   а) $MK = OP$;
   б) $TM = TP$, где T — точка пересечения отрезков MK и OP.
2. AC и A_1C_1 — основания равнобедренных треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, точки M и M_1 — середины сторон BC и B_1C_1, $AC = A_1C_1$, $AB = A_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABM = \triangle A_1B_1M_1$.

С—10

Докажите равенство треугольников по медиане и углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

С—11

AB и CD — два диаметра окружности с центром в точке O. Луч OE — биссектриса угла AOC. OE пересекает окружность в точке K, причем $KE = KO$. Периметр треугольника KCO в 3 раза больше радиуса окружности. Докажите, что точки E, A, C и O лежат на одной окружности.

С—12

1. С помощью циркуля и линейки постройте точку M, такую, чтобы она была удалена от точки A на расстояние, равное PQ, и так, чтобы $\angle MEO = \angle MFO$ ($OE = OF$) (рис. 151). Выясните число решений этой задачи в зависимости от длины отрезка PQ.

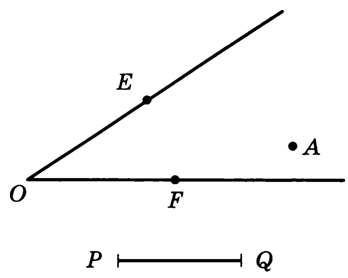

Рис. 151

2. Как с помощью циркуля и линейки можно разделить угол в 35° на 7 равных частей?

С—13

На рисунке 152 AC — биссектриса угла BAM, $AD = CE$, $BE = BD$, $\angle BDA = \angle BEC$. Докажите, что $AM \parallel BC$.

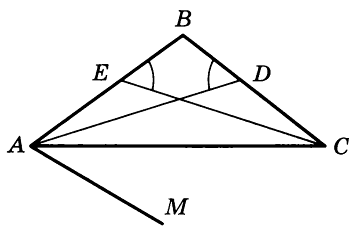

Рис. 152

С—14

1. На рисунке 153 $AB = BC = CD = DE$, $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE$. Докажите, что точки A, C и E лежат на одной прямой.
2. В треугольнике ABC BD — биссектриса угла ABC, M — середина AB. Постройте прямую, проходящую через точку M и параллельную BD (используя циркуль и линейку).

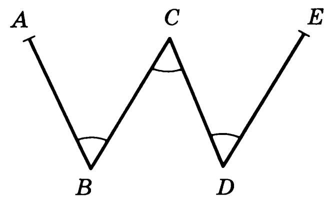

Рис. 153

С—15

На отрезке AB взята точка C. Через точки A и B проведены по одну сторону от AB параллельные лучи. На них отложены отрезки $AD = AC$ и $BE = BC$. Точка C соединена отрезками прямых с точками D и E. Докажите, что $DC \perp CE$.

С—16

На рисунке 154 $AB = BC$, $AO = OD$ и $BO = OC$. Докажите, что BD — биссектриса $\angle EBC$.

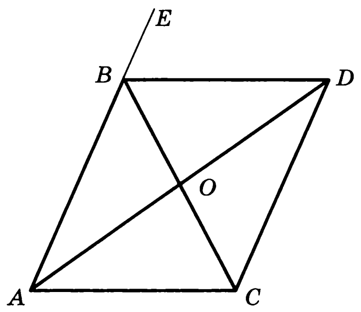

Рис. 154

С—17

1. В треугольнике ABC угол B тупой. Можно ли внутри треугольника отметить точки O и P так, чтобы угол OBC был не меньше угла APC?
2. В треугольнике ABC $AB = BC$. Биссектрисы внешних углов при вершинах A и C лежат на прямых, пересекающихся в точке O. Может ли выполняться равенство $AO = OB = OC$?

С—18

1. Внутри треугольника ABC взята точка D. Известно, что $\angle BCD + \angle BAD > \angle DAC$. Докажите, что $AC > DC$.
2. В тупоугольном треугольнике ABC продолжения высот пересекаются в точке O так, что $\angle BOC = \angle BCO$, $\angle BOA = \angle BAO$. Найдите угол BCA.

С—19

1. Отрезки AC и BD пересекаются во внутренней точке. Докажите, что $2(BD + AC) > BC + AD + AB + CD$.
2. Вне равностороннего треугольника ABC отмечена точка E, а внутри него — точка M. Докажите, что $MA < BE + EC$.

С—20

1. В треугольнике ABC $\angle B = 90°$. Из точки D, взятой на стороне BC, проведен отрезок DE, перпендикулярный к BC и пересекающий AC в точке O, $\angle DOC = 70°$, $\angle DEC = 45°$, $\angle BAD = 50°$. Найдите угол AED.

2. В треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $\angle B = 45°$. Отрезок CE пересекает сторону AB, $\angle CEA = 90°$. На сторонах AB и AC взяты точки P и M так, что M — середина AC и $PM \perp AC$, $PM = EA$. Найдите угол EAC.

С—21

1. В треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O, $\angle BAA_1 = \angle ACC_1$, $A_1O = C_1O$. Докажите, что $AC = 2BA_1$.

2. На рисунке 155 $\angle ABC = 50°$, $\angle BAC = 40°$, $\angle AM_1M = 90°$, $AM_1 = BA_1$, $A_1A = AM$. Докажите, что $DC_1 = C_1C$, если точки A_1 и C_1 — середины BC и AB соответственно.

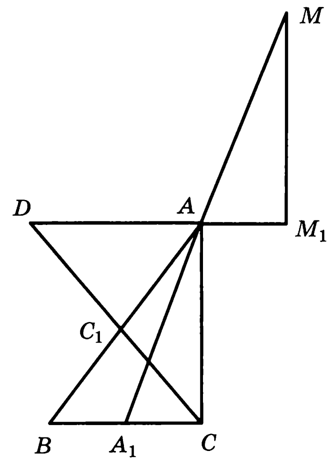

Рис. 155

С—22

1. Из точки A к некоторой прямой проведены перпендикуляр AC и наклонная AB. Точки E и D принадлежат отрезкам AB и AC соответственно. Докажите, что $ED < AB$.

2. В треугольнике MKP $\angle P = 90°$. Через точки A и B, взятые на сторонах MK и KP соответственно, проведена прямая AB, параллельная MP. Расстояние между прямыми AB и MP вдвое больше расстояния от точки K до прямой AB. Докажите, что $MP = 3AB$.

С—23*

1. На рисунке 156 $AB = BC$, точки B и D равноудалены от прямой AC. Докажите, что $2BC < AD + DC$.

2. Дан угол ABC, через вершину которого вне угла проведена прямая a, и отрезок PO. Внутри угла ABC постройте точку, удаленную от прямой a на расстояние PO и равноудаленную от прямых AB и BC.

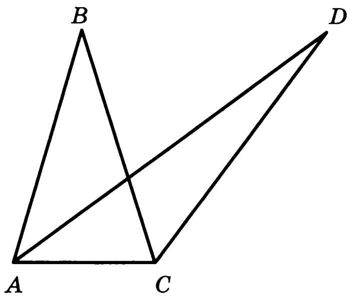

Рис. 156

С—24

1. Даны угол A и точка M внутри него. Постройте на сторонах угла точки B и C так, чтобы отрезок AM был медианой треугольника ABC.

2. Даны отрезки PQ, P_1Q_1, P_2Q_2 и угол hk. Как построить треугольник ABC, в котором отрезок AM, равный PQ, лежал бы на стороне AB, отрезок CE, равный P_1Q_1,— на стороне BC, $AC - ME = P_2Q_2$, $ME \parallel AC$, $\angle AMC = \angle hk$?

С—25*

1. На стороне AC треугольника ABC взята точка M. Постройте треугольник ABC по отрезкам BC, AM и углам ABM, AMB.

2. Постройте остроугольный треугольник ABC по разности углов A и B, высоте CD и стороне BC.

С—26

В некоторой окружности проведены две равные хорды KM и PH, пересекающиеся в точке T. Центр окружности O расположен внутри треугольника KHT, причем расстояние от точки O до прямой HK меньше расстояния от точки O до прямой PM, $\angle MPH = \angle MKH$.

1) Докажите, что $\angle KOM = \angle POH$.
2) Докажите, что $\angle POK + 2\angle OMH = 180°$.
3) Докажите, что $PM \parallel KH$.
4) Сравните отрезки PM и KH.

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

К—1 Вариант 1

1°. На рисунке 157 луч OC является биссектрисой угла AOB. Найдите угол BOD, если угол AOB прямой.

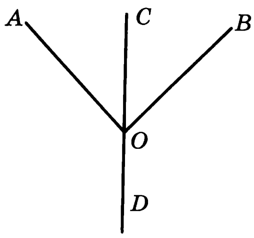

Рис. 157

2°. На прямой отмечены точки A, B, C, D так, что точка C лежит между точками A и B, а точка B принадлежит отрезку CD. $AC = 65$ см, $BD = 6{,}4$ дм. Сравните отрезки AB и CD.

3. Прямые AD и BC пересекаются в точке O. Внутри угла AOB взята точка M, а внутри угла COD — точка K. $\angle AOB = 80°$, $\angle MOB = 30°$, $\angle KOD = 40°$.

а) Найдите углы AOM и COK.

б) Являются ли углы MOB и COK вертикальными? Ответ объясните.

4*. Даны три прямые, каждая из которых пересекает хотя бы одну другую. Сколько всего точек пересечения могут иметь такие прямые?

К—1 Вариант 2

1°. На рисунке 158 угол BOC прямой. Найдите $\angle 1$, если $\angle 2 = 70°$.

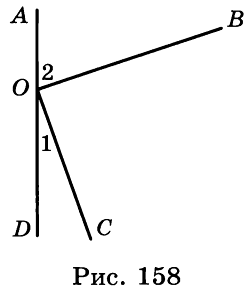

Рис. 158

2°. Точка C — середина отрезка AB, точка D — середина отрезка AC, $BD = 15{,}3$ см. Найдите длину отрезка AC. Ответ выразите в миллиметрах.

3. Отрезки PE и HM лежат на перпендикулярных прямых и пересекаются в точке K. Внутри угла PKH взята точка A, а внутри угла MKE — точка B, $\angle AKH = 40°$, $\angle MKB = 50°$.

а) Найдите углы PKA и BKE.

б) Лежат ли точки A, K, B на одной прямой? Ответ объясните.

4*. Расположите шесть отрезков так, чтобы каждый из них имел общие точки ровно с тремя другими и число всех этих точек было равно пяти.

К—1 Вариант 3

1°. На рисунке 159 прямые AB и CD взаимно перпендикулярны. $\angle KOD = 135°$. Является ли луч OK биссектрисой угла AOC? Ответ объясните.

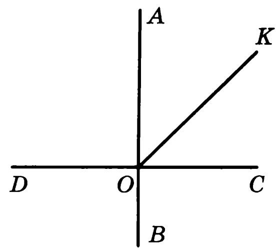

Рис. 159

2°. На отрезке PH отмечены точки K и M так, что точка K лежит между точками P и M, $HK = 53{,}5$ см, $PM = 535$ мм. Сравните отрезки PK и HM.

3. Развернутый угол AOB разделяет плоскость на две части. Точка E лежит в одной части, точка P — в другой; $\angle EOB = 50°$, $\angle POB = 130°$.

а) Равны ли углы EOB и POA?

б) Являются ли углы EOB и POA вертикальными?

Ответы на вопросы объясните.

4*. Можно ли расположить шесть точек на четырех отрезках, не лежащих на одной прямой, так, чтобы каждому отрезку принадлежало по три точки?

К—1 Вариант 4

1°. На рисунке 160 прямые a и b взаимно перпендикулярны. Найдите сумму углов 1 и 2.

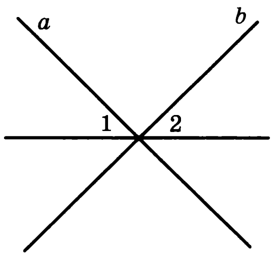

Рис. 160

2°. Точка E лежит на прямой между точками P и K, а точка K принадлежит отрезку EM; $PE = 5$ см, $EK = 6$ см, $KM = 8$ см. Найдите расстояние между серединами отрезков PE и KM. Ответ выразите в миллиметрах.

3. Развернутый угол AOB разделяет плоскость на две части. Луч OM лежит в одной части, а луч OK — в другой. Известно, что углы MOA и KOB прямые.

а) Равны ли углы BOM и KOA?

б) Являются ли прямые MK и AB взаимно перпендикулярными?

Ответы на вопросы объясните.

4*. На сколько частей могут разделить плоскость три прямые, среди которых есть пересекающиеся?

К—2

Вариант 1

1°. На рисунке 161 отрезки AB и CD имеют общую середину. Докажите, что треугольники AOC и BOD равны.

2°. Даны прямая и отрезок. Постройте точку, такую, чтобы перпендикуляр, опущенный из этой точки на прямую, равнялся данному отрезку.

3. В треугольнике ABC $AB = BC$. На медиане BE отмечена точка M, а на сторонах AB и BC — точки P и K соответственно. (Точки P, M и K не лежат на одной прямой.) Известно, что $\angle BMP = \angle BMK$. Докажите, что:

а) углы BPM и BKM равны;

б) прямые PK и BM взаимно перпендикулярны.

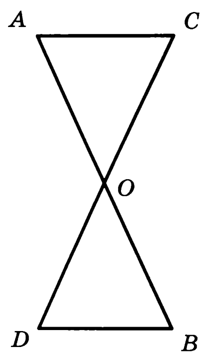

Рис. 161

4*. Дан угол в 54°. Можно ли с помощью циркуля и линейки построить угол в 18°?

К—2

Вариант 2

1°. На рисунке 162 луч BD является биссектрисой угла ABC, а луч DB является биссектрисой угла ADC. Докажите, что треугольники ABD и CBD равны.

2°. Дан отрезок. Постройте две какие-либо взаимно перпендикулярные прямые и на одной из них от точки пересечения отложите отрезок, равный данному.

3. Внутри треугольника ABC взята точка O, причем $\angle BOC = \angle BOA$, $AO = OC$.

а) Докажите, что углы BAC и BCA равны.

б) Докажите, что прямая BO проходит через середину отрезка AC.

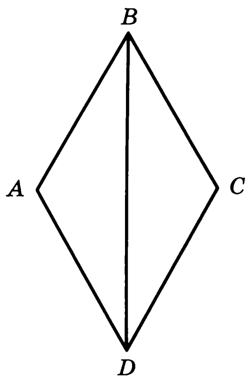

Рис. 162

4*. Как с помощью циркуля и линейки построить угол в $11°15'$?

К—2 **Вариант 3**

1°. На рисунке 163 отрезок AB равен отрезку CD, а отрезок BC равен отрезку AD. Докажите, что треугольники ABD и CBD равны.

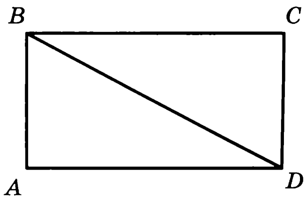

Рис. 163

2°. Даны неразвернутый угол и отрезок. Постройте точку, удаленную от вершины угла на расстояние, равное половине данного отрезка.

3. На высоте равнобедренного треугольника ABC, проведенной к основанию AC, взята точка P, а на сторонах AB и BC — точки M и K соответственно. (Точки M, P и K не лежат на одной прямой.) Известно, что $BM = BK$.

а) Докажите, что углы BMP и BKP равны.

б) Докажите, что углы KMP и PKM равны.

4*. Дан угол в 34°. Можно ли с помощью циркуля и линейки построить угол в 12°?

К—2 **Вариант 4**

1°. На рисунке 164 отрезки AB и CD являются диаметрами окружности. Докажите, что треугольники AOD и BOC равны.

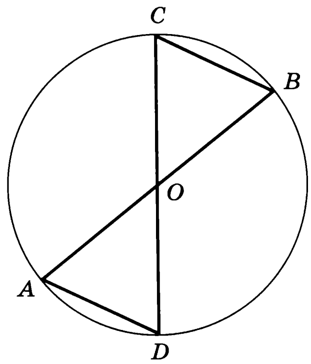

Рис. 164

2°. Даны неразвернутый угол и отрезок. Постройте какой-либо угол, равный данному, и на его стороне постройте точку, удаленную от вершины угла на расстояние, равное половине данного отрезка.

3. На сторонах AB, BC, AC равнобедренного треугольника ABC с основанием AC отмечены точки M, K, P соответственно так, что $\angle AMP = \angle PKC$ и $AM = KC$.

а) Докажите, что $MP = PK$.

б) Докажите, что прямые MK и BP взаимно перпендикулярны.

4*. Как с помощью циркуля и линейки построить угол в 67°30′?

К—3

Вариант 1

1°. На рисунке 165 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$, $\angle 3 = 50°$. Найдите $\angle 4$.

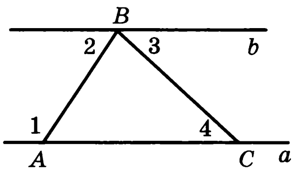

Рис. 165

2°. Могут ли две стороны треугольника быть параллельными одной прямой?

3. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отмечены точки T, P, M соответственно; $\angle MPC = 51°$, $\angle ABC = 52°$, $\angle ATM = 52°$.

а) Найдите угол TMP.

б) Докажите, что прямые MP и BT имеют одну общую точку.

4*. Из картона вырезан шаблон в виде полосы с параллельными краями (рис. 166). Как с помощью этого шаблона построить угол, равный данному?

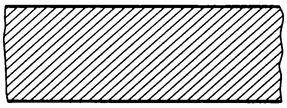

Рис. 166

К—3

Вариант 2

1°. На рисунке 167 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 140°$. Найдите $\angle 4$.

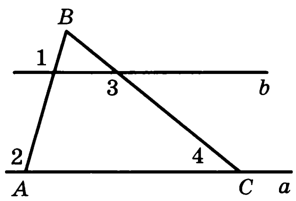

Рис. 167

2°. Через точку, взятую во внутренней области угла ABC, проведена прямая, параллельная прямой AB. Пересекает ли эта прямая прямую BC?

3. На прямой последовательно отложены отрезки AB, BC, CD. Точки E и P лежат по разные стороны от этой прямой. $\angle ABE = \angle PCD = 143°$, $\angle PBD = 49°$, $\angle ACE = 48°$.

а) Докажите, что прямые BE и PC параллельны.

б) Докажите, что прямые PB и CE пересекаются.

4*. Из картона вырезан шаблон в виде полосы с параллельными краями (рис. 168). Как с помощью этого шаблона построить два несмежных угла, дающих в сумме 180°?

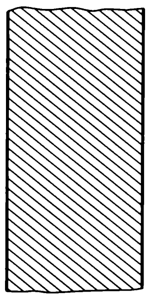

Рис. 168

К—3 **Вариант 3**

1°. На рисунке 169 $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = 120°$. Найдите $\angle 4$.

2°. Даны три прямые a, b, c; $a \parallel b$, $b \parallel c$. Сколько общих точек имеют прямые a и c?

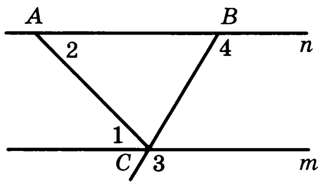

Рис. 169

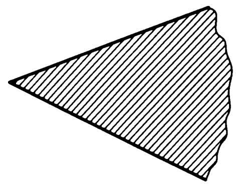
Рис. 170

3. Из точек A и B, лежащих по одну сторону от прямой, проведены перпендикуляры AC и BD к этой прямой; $\angle BAC = 117°$.

а) Найдите угол ABD.

б) Докажите, что прямые AB и CD пересекаются.

4*. Из картона вырезан шаблон в виде неразвернутого угла (рис. 170). Как построить с помощью этого шаблона два отрезка, лежащих на параллельных прямых?

К—3 **Вариант 4**

1°. На рисунке 171 $\angle 1 = \angle 2$, $AB \perp a$. Найдите $\angle 3$.

2°. Даны три прямые a, b, c; $a \parallel b$, прямая a пересекает прямую c. Сколько общих точек имеют прямые b и c?

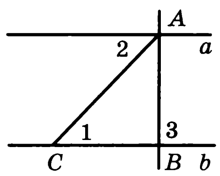

Рис. 171

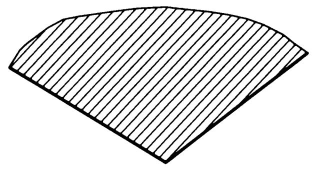
Рис. 172

3. На сторонах угла A, равного 43°, отмечены точки B и C, а внутри угла — точка D так, что $\angle ABD = 137°$, $\angle BDC = 45°$.

а) Найдите угол ACD.

б) Докажите, что прямые AB и DC имеют одну общую точку.

4*. Из картона вырезан шаблон в виде неразвернутого угла (рис. 172). Как с помощью этого шаблона и линейки без делений проверить параллельность двух прямых?

К—4 **Вариант 1**

1°. В треугольнике ABC $\angle B = 70°$, $\angle C = 60°$. Сравните отрезки AC и BC.

2°. Даны два треугольника ABC и MPK, $\angle A = \angle M = 90°$, $\angle C = \angle K$, $BC = KP$, $AC = \frac{1}{2}BC$. Найдите угол P.

3. В треугольнике ABC $\angle A = 90°$, $\angle C = 15°$. На стороне AC отмечена точка D так, что $\angle DBC = 15°$.

а) Докажите, что $BD = 2AB$.

б) Докажите, что $BC < 4AB$.

4*. В треугольнике все стороны имеют разные длины. Можно ли этот треугольник разрезать на равносторонние треугольники?

К—4 **Вариант 2**

1°. В треугольнике ABC $AB > BC > AC$. Найдите $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, если известно, что один из углов треугольника равен 120°, а другой 40°.

2°. В треугольниках ABC и MKP $\angle A = \angle M = 90°$, $AB = MP$, $BC = KP$, $\angle B = 30°$. Докажите, что $KM = \frac{1}{2}KP$.

3. В треугольнике ABC $\angle C = 60°$. На стороне AC отмечена точка D так, что $\angle BDC = 60°$, $\angle ABD = 30°$.

а) Докажите, что $AD = BC$.

б) Докажите, что периметр треугольника ABC меньше пяти длин отрезка BC.

4*. Можно ли из каких-либо четырех равнобедренных треугольников сложить равнобедренный треугольник?

К—4 **Вариант 3**

1°. Внешний угол при вершине B треугольника ABC равен 40°, а один из внутренних углов этого треугольника равен 20°. Сравните отрезки AB и BC.

2°. Даны треугольники ABC и MPK, где $\angle A = \angle M = 90°$, $BC = PK$, $\angle C = \angle K$. Докажите, что $AB + PK > AC$.

3. В треугольнике ABC угол B прямой, BD — высота.

а) Докажите, что $\angle A = \angle DBC$.

б) Докажите, что если $\angle A < \angle C$, то $AD > DC$.

4*. Можно ли какой-либо прямоугольный треугольник разрезать на два треугольника, один из которых равносторонний, другой равнобедренный?

К—4 **Вариант 4**

1°. В треугольнике ABC углы A и C равны, BD — высота треугольника. Докажите, что треугольники ABD и CBD равны.

2°. В треугольнике ABC угол A прямой, угол C равен $60°$. Докажите, что $AB < 2AC$.

3. На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки M и H соответственно так, что углы ABC и CMH равны.

а) Докажите, что углы MHC и CAB равны.

б) Докажите, что если $MH < CM$, то $AB < BC$.

4*. В треугольнике все стороны имеют разные длины. Можно ли этот треугольник разрезать на два равных треугольника?

К—5 **Вариант 1**

В треугольнике ABC $\angle A = \angle C = 45°$.

а)° Установите вид треугольника и постройте его на стороне AB.

б)° Докажите, что медиана BD делит треугольник ABC на два равных треугольника.

в) Докажите, что прямая BK, перпендикулярная медиане BD треугольника ABC, не имеет общих точек с прямой AC.

г) Докажите, что прямая BK, перпендикулярная медиане BD треугольника ABC, содержит биссектрису одного из внешних углов этого треугольника.

д)* Возможно ли равенство $AE = EC$, если точка E не лежит на прямой, содержащей медиану BD треугольника ABC?

К—5 **Вариант 2**

В треугольнике ABC $\angle A = \angle C = 60°$.

а)° Установите вид треугольника и постройте его по стороне AB.

б)° Докажите, что треугольник MBH равен треугольнику HKC, если M, H, K — середины сторон AB, BC и AC треугольника ABC соответственно.

в) Найдите угол BMH и докажите, что $MH \parallel AC$, если M и H — середины сторон AB и BC соответственно.

г) Докажите, что расстояние от точки B до прямой HM равно расстоянию между прямыми MH и AC, если M и H — середины сторон AB и BC треугольника ABC соответственно.

д)* Как построить точку, равноудаленную от вершин треугольника ABC?

К—5 **Вариант 3**

В треугольнике ABC $\angle A = 60°$, $\angle C = 30°$.

а)° Установите вид треугольника и постройте его по стороне AB.

б)° Докажите, что треугольники CMA и ABC равны, если точка M расположена вне треугольника ABC так, что $MA \parallel BC$ и $MC \parallel AB$.

в) Докажите, что $AB \perp MA$, $BC \perp MC$, $CM \perp MA$, если точка M расположена вне треугольника ABC и $MA \parallel BC$, $MC \parallel AB$.

г) Найдите угол BOA, если O — середина отрезка AC.

д)* Можно ли провести окружность через точки A, B, C, M, если точка M расположена вне треугольника ABC и $MA \parallel BC$, $MC \parallel AB$?

К—5 **Вариант 4**

Равные отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них, причем $AD = AO$.

а)° Установите вид треугольника ADO и постройте отрезки AB и CD, о которых говорится в условии задачи, если дан отрезок AD.

б)° Докажите, что $BC \parallel AD$.

в) Сравните отрезки OM и CO, если M — середина отрезка AD.

г) Найдите угол AEC, если E — точка пересечения биссектрис углов BCO и DAO.

д)* Является ли точка O серединой отрезка MH, если M — середина AD, H — середина BC?

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ДИКТАНТЫ

МД—1

ВАРИАНТ 1

1. Начертите две пересекающиеся прямые и выберите на одной из них отрезок, не имеющий общих точек с другой прямой. Укажите точку, которая одновременно принадлежит обеим прямым.
2. Сколько лучей с началом в указанных точках изображено на рисунке 173?

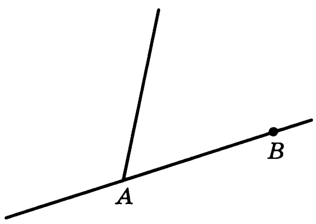

Рис. 173

3. Начертите неразвернутый угол AOB. Проведите луч OM во внутренней его области. Отметьте точку K, которая принадлежит внутренней области угла AOM, и точку N, принадлежащую внешней области угла AOB.
4. а) Серединой отрезка называется...
   б) На рисунке 174 OC — биссектриса угла AOB. Сравните углы AOM и MOB.
5. Точки A, B и C лежат на одной прямой; $AB = 4$ см, $AC = 10$ см. Длина отрезка BC равна...
6. $AC = 17$ см, $AB = 10$ см, $BC = 8$ см. Лежат ли точки A, B и C на одной прямой?
7. Угол, равный 160°, делится лучом с началом в вершине угла на два угла, один из которых больше другого на 20°. Тогда эти углы равны...
8. На рисунке 175 $\angle COA = 40°$, OM — биссектриса $\angle COB$. Тогда $\angle MOB = ...$

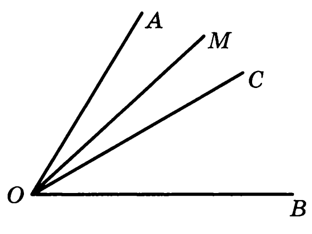

Рис. 174

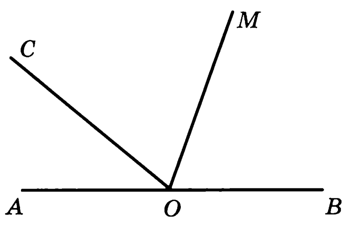

Рис. 175

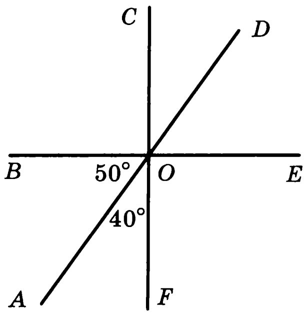

Рис. 176

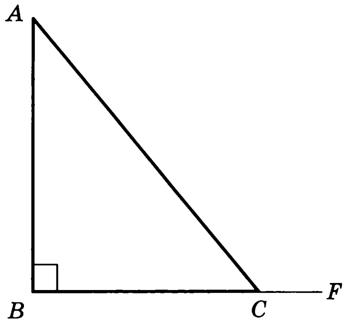

Рис. 177

9. Какой еще из углов, изображенных на рисунке 176, равен 40°? Почему?
10. На рисунке 177 $AB \perp BF$. Может ли угол ACF быть равным 90°? Почему?

ВАРИАНТ 2

1. Начертите две пересекающиеся прямые и выберите на одной из них отрезок, который имеет общую точку с другой прямой. Укажите точку, которая лежит на одной из этих прямых, но не принадлежит выбранному отрезку.
2. Сколько лучей с началом в указанных точках изображено на рисунке 178?
3. Начертите неразвернутый угол COD. Проведите луч OE по внутренней его области. Отметьте точку A, которая принадлежит внутренней области угла DOE, и точку B, которая одновременно принадлежит внутренней области угла COD и внешней области угла DOE.
4. а) Биссектрисой угла называется...
   б) На рисунке 179 O — середина отрезка AB. Сравните отрезки AC и CB.
5. Точки E, F и M лежат на одной прямой; $EF = 5$ дм, $EM = 12$ дм. Длина отрезка FM равна...

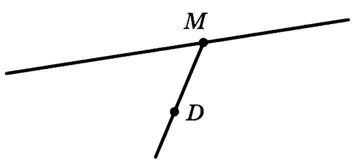

Рис. 178

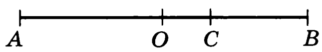

Рис. 179

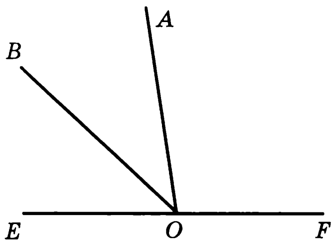

Рис. 180

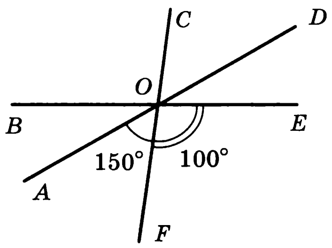

Рис. 181

6. $EF = 25$ см, $EM = 10$ см, $MF = 16$ см. Лежат ли точки E, M и F на одной прямой?
7. Угол, равный 80°, делится лучом с началом в вершине угла на два угла, такие, что градусная мера одного угла в 3 раза больше другого. Тогда эти углы равны...
8. На рисунке 180 $\angle AOF = 100°$, OB — биссектриса $\angle AOE$. Тогда $\angle AOB = ...$
9. Какой еще из углов, изображенных на рисунке 181, равен 150°? Почему?

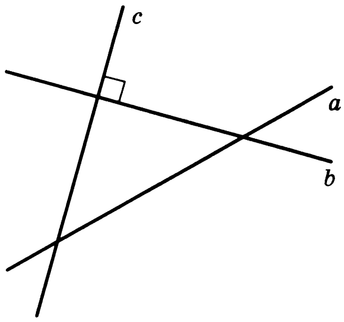

Рис. 182

10. На рисунке 182 $c \perp b$. Может ли быть, что $c \perp a$? Почему?

МД—2

ВАРИАНТ 1

1. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle A = 35°$. Тогда $\angle A_1 = ...$
2. На рисунке 183 $AB = FM$, $AC = EM$, $\angle BAC = \angle FME$. Найдите $\frac{BC}{EF}$.

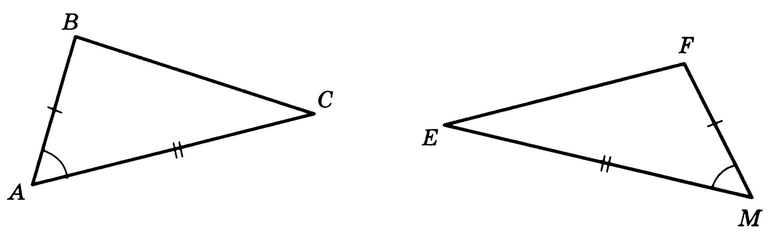

Рис. 183

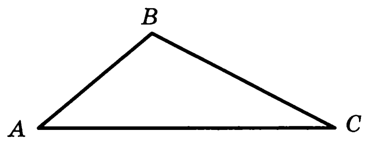

Рис. 184

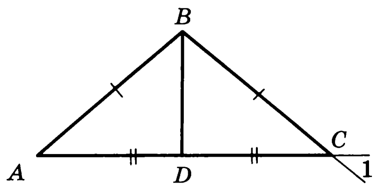

Рис. 185

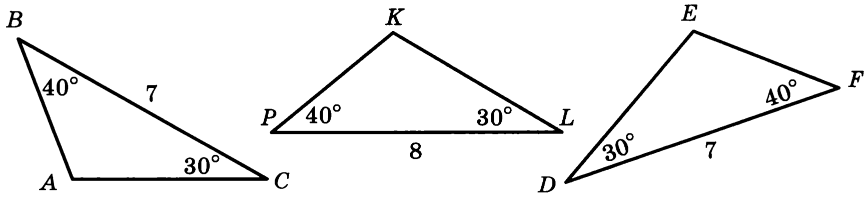

Рис. 186

3. Медианой треугольника называется...
4. При помощи линейки и угольника начертите высоты, опущенные из вершин B и C (рис. 184).
5. На рисунке 185 $AB = BC$, $\angle BAC = 40°$, $AD = DC$. Найдите $\angle 1$ и $\angle BDC$.
6. Укажите пару равных треугольников, изображенных на рисунке 186. Обоснуйте.
7. На рисунке 187 $AB = AD$ и $BC = CD$. Является ли CA биссектрисой угла BCD?
8. На рисунке 188 укажите отрезки с концами в обозначенных точках, которые являются радиусами, диаметрами и хордами окружности.
9. Начертите произвольный угол и произвольный луч. С помощью циркуля и линейки от данного луча отложите угол, равный данному.
10. Начертите отрезок и с помощью циркуля и линейки разделите его пополам.

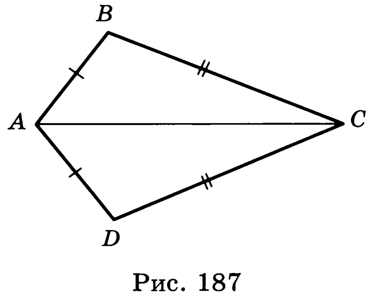

Рис. 187

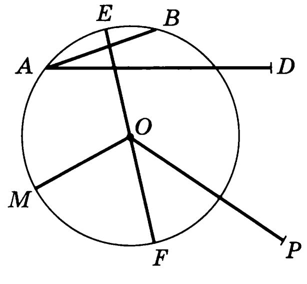

Рис. 188

ВАРИАНТ 2

1. $\triangle EFM = \triangle E_1F_1M_1$, $\angle F = \angle F_1$, $E_1M_1 = 7$ см. Тогда $EM = \ldots$
2. На рисунке 189 $EL = AF$, $LK = AM$, $\angle ELK = \angle MAF$, $\angle E = 40°$. Тогда $\angle F = \ldots$
3. Высотой треугольника называется...
4. При помощи линейки и угольника начертите высоты, проведенные из вершин K и N (рис. 190).
5. На рисунке 191 $EF = FM$, $\angle EFA = \angle MFA$, $\angle FEA = 50°$. Найдите $\angle 1$ и $\angle FAE$.
6. Укажите пару равных треугольников, изображенных на рисунке 192. Обоснуйте.

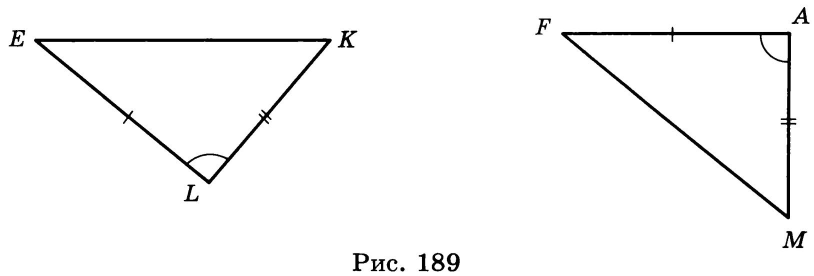

Рис. 189

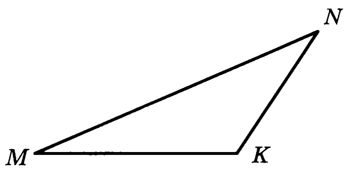

Рис. 190

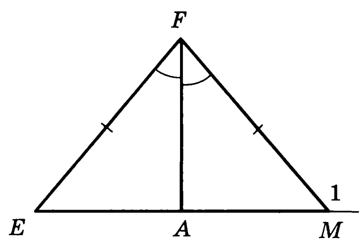

Рис. 191

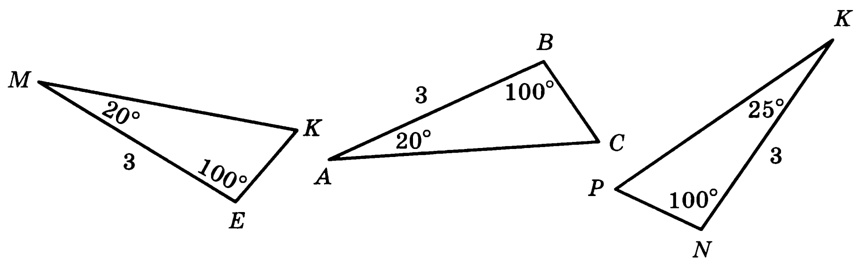

Рис. 192

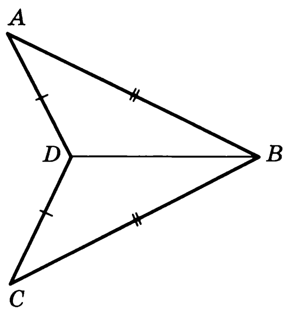

Рис. 193

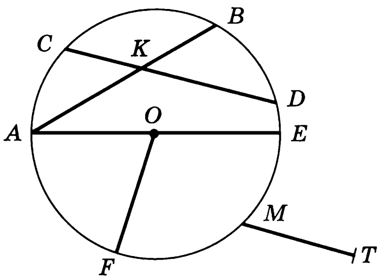

Рис. 194

7. На рисунке 193 $AD = DC$ и $AB = BC$. Является ли BD биссектрисой угла ABC?
8. На рисунке 194 укажите отрезки с концами в обозначенных точках, которые являются радиусами, диаметрами и хордами окружности.
9. Начертите произвольный угол и с помощью циркуля и линейки постройте его биссектрису.
10. Начертите произвольную прямую и выберите на ней произвольную точку. С помощью циркуля и линейки постройте прямую, которая проходит через данную точку перпендикулярно к данной прямой.

МД—3

ВАРИАНТ 1

1. Укажите пары накрест лежащих, односторонних и соответственных углов, изображенных на рисунке 195.
2. Какие из указанных прямых на рисунке 196 параллельны? Почему?

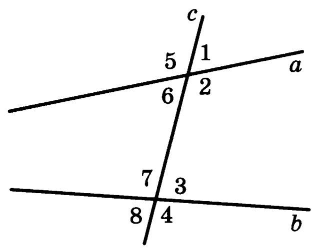

Рис. 195

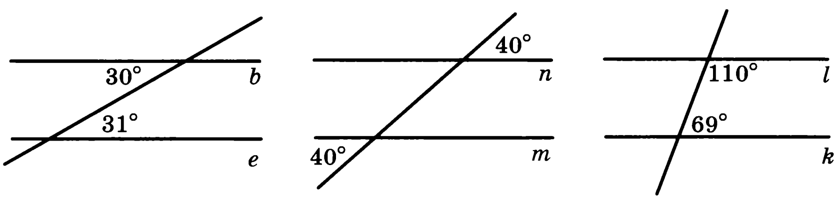

Рис. 196

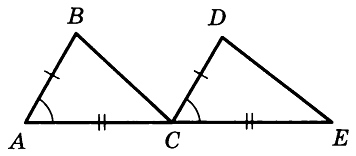

Рис. 197

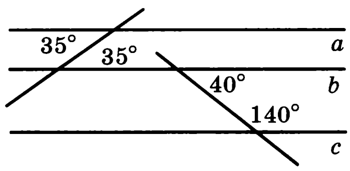

Рис. 198

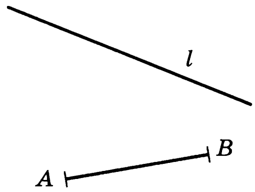

Рис. 199

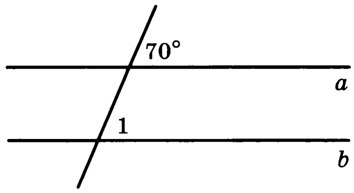

Рис. 200

3. На рисунке 197 $AB = CD$, $AC = CE$, $\angle BAC = \angle DCE$. Имеют ли общие точки прямые BC и DE?
4. Пересекаются ли изображенные на рисунке 198 прямые a и c? Почему?
5. $a \perp c$, $b \perp c$. Прямая d пересекает прямую a. Пересекает ли эта прямая прямую b? Почему?
6. При помощи угольника и линейки проведите прямые, параллельные прямой l и проходящие через концы отрезка AB (рис. 199).
7. Начертите произвольную прямую и выберите точку вне ее. С помощью циркуля и линейки через данную точку проведите прямую, параллельную данной прямой.
8. На рисунке 200 $a \parallel b$. Чему равен $\angle 1$? Почему?
9. На рисунке 201 $a \parallel b$. Чему равен угол BAC?
10. На рисунке 202 $\angle 1 = \angle 2$. Равны ли углы 3 и 4? Почему?

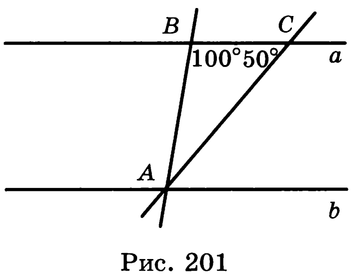

Рис. 201

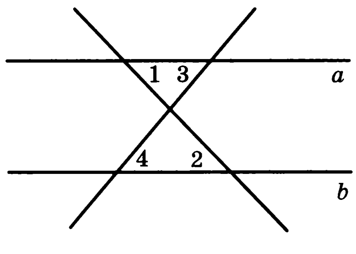

Рис. 202

ВАРИАНТ 2

1. Укажите пары накрест лежащих, односторонних и соответственных углов, изображенных на рисунке 203.
2. Какие из указанных прямых на рисунке 204 параллельны? Почему?
3. На рисунке 205 $AB = CD$, $AC = CE$, $BC = DE$. Имеют ли общие точки прямые AB и CD?
4. Пересекаются ли изображенные на рисунке 206 прямые m и k? Почему?

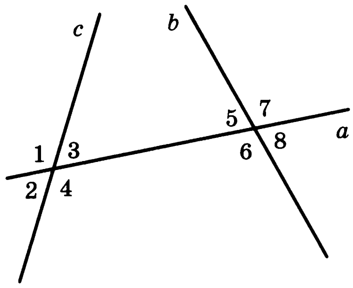

Рис. 203

5. В прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, $E \in BC$. Через точку E проведена прямая, перпендикулярная к BC. Пересечет ли эта прямая прямую AC? Почему?
6. При помощи угольника и линейки проведите прямые, параллельные прямой m и проходящие через концы отрезка E и F (рис. 207).

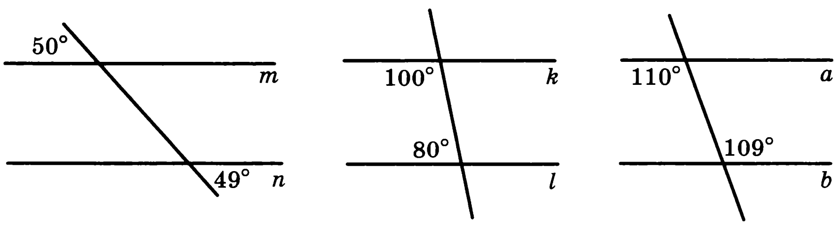

Рис. 204

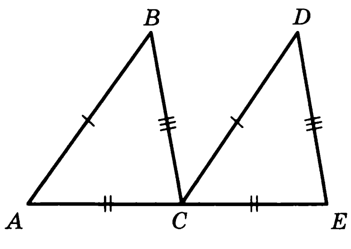

Рис. 205

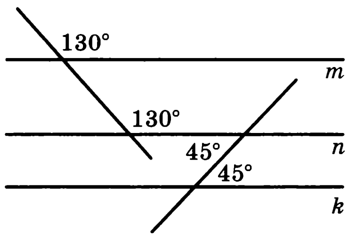

Рис. 206

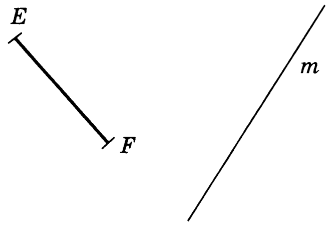

Рис. 207

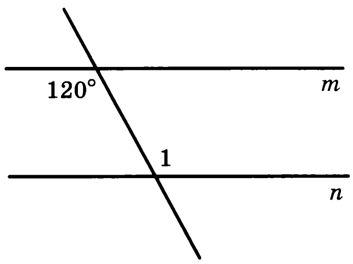

Рис. 208

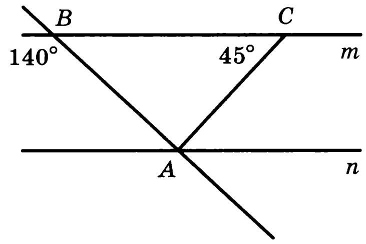

Рис. 209

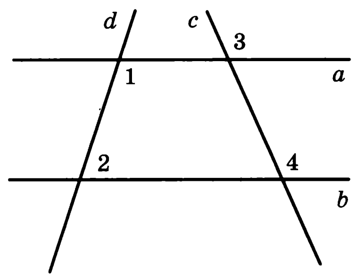

Рис. 210

7. Начертите произвольный треугольник ABC и с помощью циркуля и линейки проведите прямую, проходящую через вершину B и параллельную прямой AC.
8. На рисунке 208 $m \parallel n$. Чему равен $\angle 1$? Почему?
9. На рисунке 209 $m \parallel n$. Чему равен угол BAC?
10. На рисунке 210 $\angle 1 + \angle 2 = 180°$. Равны ли углы 3 и 4? Почему?

МД—4

ВАРИАНТ 1

1. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен 20°. Тогда угол при вершине треугольника равен...
2. В треугольнике ABC $AB = 10$ см, $BC = 11$ см. Сравните углы C и A.
3. В треугольнике ABC $\angle A = \angle C$, BD — медиана. Тогда $\angle BDC$ равен...
4. Две стороны треугольника равны 1 см и 0,9 см. Найдите третью сторону, если ее длина выражается целым числом.

5. Треугольники на рисунке 211 прямоугольные. По данным рисунка найдите отношение $\frac{AC}{A_1C_1}$.
6. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC = 10$ см, $\angle B = 60°$. Тогда расстояние от вершины C до гипотенузы AB равно...
7. $a \parallel b$, $A \in a$, $B \in b$, $C \in a$, $AB \perp b$, $AB = 7$ см. Расстояние от точки C до прямой b равно...

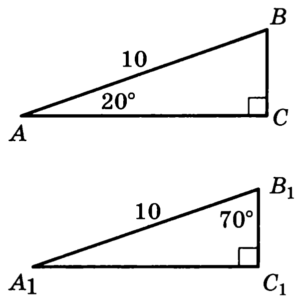

Рис. 211

8. Начертите две параллельные прямые и изобразите множество точек, равноудаленных от этих прямых.
9. Начертите тупоугольный треугольник ABC ($\angle C$ тупой). Постройте остроугольный треугольник с основанием AC и имеющий высоту, опущенную на сторону AC, равную высоте данного треугольника, опущенной на прямую, содержащую их общую сторону.
10. Постройте с помощью циркуля и линейки равнобедренный треугольник по основанию и углу при нем.

ВАРИАНТ 2

1. В треугольнике ABC $\angle A = 30°$, $\angle B = 100°$. Тогда внешний угол при вершине C равен...
2. В треугольнике ABC $\angle A = 40°$, $\angle C = 41°$. Сравните стороны BC и AB.
3. В треугольнике EFK $\angle E = \angle K$, $FM \perp EK$. Сравните углы EFM и MFK.
4. Две стороны треугольника равны 0,9 см и 1,9 см. Найдите третью сторону, если ее длина выражается целым числом.
5. Треугольники на рисунке 212 прямоугольные. По данным рисунка найдите разность $NF - N_1F_1$.

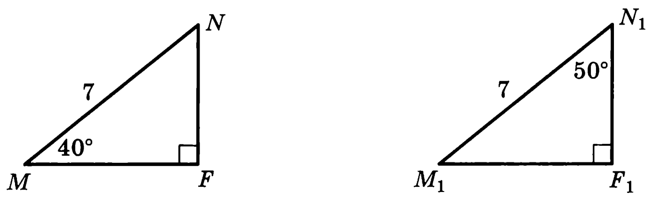

Рис. 212

6. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $\angle B = 60°$. Расстояние от вершины C до гипотенузы AB равно 8 см. Тогда $AC = \ldots$
7. $a \parallel b$, $A \in a$, $B \in b$, $AB \perp a$, $AB = 12$ см. Тогда расстояние между прямыми a и b равно...
8. Начертите прямую и некоторый отрезок. Изобразите множество точек, удаленных от данной прямой на расстояние, равное длине данного отрезка.
9. Начертите остроугольный треугольник ABC. Постройте тупоугольный треугольник с основанием AC и тупым углом при вершине C, такой, чтобы его высота, опущенная на прямую AC, была равна высоте данного треугольника, проведенной из вершины B.
10. Постройте с помощью циркуля и линейки равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при вершине.

ПРИМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ К ЭКЗАМЕНУ ПО ГЕОМЕТРИИ*

Тема. Геометрические построения

а) Постройте прямоугольный треугольник по катету и прилежащему к нему острому углу.

б) Постройте прямоугольный треугольник по катету и противолежащему ему острому углу.

в) Постройте прямоугольный треугольник по острому углу и высоте, проведенной из вершины прямого угла.

Тема. Равнобедренный треугольник

а) Разность двух сторон тупоугольного равнобедренного треугольника равна 8 см, а его периметр равен 38 см. Найдите стороны треугольника.

б) В равнобедренном треугольнике ABC угол B — тупой. Высота BD равна 8 см. Найдите периметр треугольника ABC, если периметр треугольника ABD равен 24 см.

в) В треугольнике ABC внешние углы при вершинах A и C равны. Найдите длину биссектрисы BD, если периметр треугольника ABC равен 36 дм, а периметр треугольника ABD равен 24 дм.

Тема. Параллельные прямые

а) На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и H соответственно; $\angle A = \angle BMH = 50°$, $\angle C = 60°$. Найдите $\angle MHC$.

б) В треугольнике ABC $\angle A = 50°$, $\angle C = 80°$. Докажите, что биссектриса внешнего угла треугольника при вершине C лежит на прямой, параллельной прямой AB.

в) На одной стороне неразвернутого угла взяты точки A и C, на другой B и D, так что $AB \parallel CD$. Точка M принадлежит отрезку AB; $\angle MCA = \angle MCD$, $\angle MDC = \angle MDB$. Докажите, что $AB = AC + BD$.

---

* Примерные задачи к экзамену по геометрии соответствуют темам Типовых экзаменационных билетов школ России. Для каждого билета приводятся задачи трех уровней — «а», «б», «в». Для решения задач уровня «а» следует применить минимальные умения и навыки, предусмотренные программой. Уровни «б» и «в» характеризуют более высокую степень подготовки школьников, причем задачи уровня «в» сложнее, чем задачи уровня «б».

Тема. **Смежные углы**

а) Углы ABD и ABC смежные, луч BO — биссектриса угла ABD. Найдите $\angle OBD$, если $\angle ABC = 40°$.

б) На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC взяты точки M, P, K соответственно, так что лучи KM и KP являются биссектрисами углов AKB и BKC. Докажите, что $\angle MKP = 90°$.

в) Дана окружность с центром O и диаметром AB. Вне окружности взята точка M, так что прямые MA и MB пересекают окружность в точках C и D соответственно; $AC = CD = BD$. Докажите, что $AC = OB$.

Тема. **Окружность**

а) В окружности с центром O проведены три радиуса OB, OC, OA, $\angle AOB = \angle BOC$. Докажите, что $\angle OAB = \angle OCB$.

б) В окружности с центром O проведены три радиуса OA, OB, OC так, что $OB \perp AC$ и отрезки OB и AC пересекаются. Докажите, что $AB = BC$.

в) В окружности с центром O проведены две непараллельные равные хорды AB и CD. Точка M — середина хорды AB, а точка H — середина хорды CD. Докажите, что углы HMO и MHO равны.

Тема. **Геометрические построения**

а) Постройте равнобедренный треугольник по основанию и сумме боковых сторон.

б) Постройте равносторонний треугольник, у которого периметр был бы в полтора раза больше периметра данного треугольника.

в) Даны отрезки PQ, P_1Q_1, P_2Q_2. Постройте равнобедренный треугольник ABC, в котором основание AC равняется PQ, биссектриса AD равняется P_1Q_1, *а* расстояние от точки D до прямой AB равняется P_2Q_2.

Тема. **Задачи на построение**

а) Постройте прямоугольный треугольник с углом, равным 30°, по данной гипотенузе.

б) Постройте равнобедренный прямоугольный треугольник по данной гипотенузе.

в) Постройте равнобедренный треугольник по основанию и углу, который образуют биссектрисы, проведенные к боковым сторонам.

Тема. **Начальные понятия по геометрии**

а) Угол MPK является частью угла MPH, равного 105°. Найдите угол MPK, если известно, что он в четыре раза меньше угла KPH.

б) Угол AOB равен 43°. Внутри этого угла проведен луч OC. Найдите угол между биссектрисами углов AOC и BOC.

в) На окружности последовательно отмечены точки A, B, C, D; $AB = CD$. Докажите, что $AC = BD$.

Тема. **Равнобедренный треугольник**

а) В треугольнике ABC $\angle BAC = \angle BCA$, биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке O. Докажите, что треугольник AOC равнобедренный.

б) В треугольнике ABC внешние углы при вершинах A и B равны. Докажите, что $2AC > AB$.

в) В треугольнике ABC $AB = BC$. Внутри треугольника отмечена точка D так, что $\angle DAC = \angle DCA$. Докажите, что точка пересечения высот этого треугольника лежит на прямой BD.

Тема. **Признаки равенства треугольников**

а) В треугольнике ABC $AB = BC$. Точки M и H — середины сторон AB и BC. MD и HE перпендикулярны к прямой AC. Докажите, что $\triangle AMD = \triangle BHE$.

б) Даны равносторонние треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. O и O_1 — соответственно точки пересечения медиан этих треугольников, $OA = O_1A_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

в) На сторонах AB, BC, AC отмечены точки C_1, A_1, B_1 соответственно так, что отрезки CC_1, AA_1, BB_1 пересекаются в точке O. На отрезке OC взята точка C_2, а на отрезках OA и OB точки A_2 и B_2 соответственно; $OA_1 = OA_2$, $OB_1 = OB_2$, $OC_1 = OC_2$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ при наложении совместятся.

Тема. **Смежные и вертикальные углы**

а) Один из углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равен 162°. Найдите остальные углы.

б) Дан треугольник ABC. На продолжении сторон AB и BC за вершину B отмечены точки D и E соответственно; $\angle DBE = 60°$, $3\angle A = \angle C$. Найдите угол, смежный с углом A.

в) Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, причем $OA = OD$. На отрезке AD отмечена точка P, так что $\angle COP = \angle BOP$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника AOD принадлежит отрезку OP.

Тема. **Равнобедренный треугольник**

а) Найдите периметр треугольника, если два его угла равны, а две стороны имеют длины 20 см и 10 см.

б) В треугольнике ABC $\angle B = 100°$, $\angle A = 40°$. Точка D принадлежит стороне AC, причем угол BDC тупой. Докажите, что $AB > BD$.

в) В треугольнике MPK $\angle M = 30°$, $\angle P = 100°$. На стороне MP отмечена точка D так, что $\angle DKP = 20°$. Сравните отрезки MD и DP.

Тема. **Параллельные прямые**

а) Отрезки AB и CD — диаметры некоторой окружности. Докажите, что прямые AC и BD параллельны.

б) Точки B и D лежат по разные стороны от прямой AC. Известно, что $AB \parallel DC$, $AD \parallel BC$. Докажите, что $\angle ABC = \angle ADC$, $AB = DC$, $AD = BC$.

в) На биссектрисе BD равнобедренного треугольника ABC взята точка E. Через эту точку проведены прямые, параллельные сторонам AB и BC и пересекающие основание AC в точках H и K. Докажите, что $AH = KC$.

Тема. **Признаки равенства треугольников**

а) На высоте AH равнобедренного треугольника ABC с прямым углом A взята точка O. Докажите, что треугольники AOB и AOC равны.

б) В равнобедренном треугольнике ABC BD — высота, проведенная к основанию. Точки M и H принадлежат сторонам AB и BC соответственно. Луч DB — биссектриса угла MDH. Докажите, что $AM = HC$.

в) В треугольнике ABC на высоте BD отмечена точка O; $\angle OAD = \angle OCD$. Докажите, что точка O равноудалена от прямых AB и BC.

Тема. **Начальные понятия геометрии**

а) Отрезки AB, BC, CD последовательно отложены на одной прямой, $AC = BD = 18$ см, $BC = 7$ см. Найдите AD.

б) Отрезки AE, EK, KB последовательно отложены на одной прямой, а точки C и D лежат по разные стороны от этой прямой; $AE = BK$, $AC = BD$, $CK = DE$. Докажите, что $\triangle ACK = \triangle BED$.

в) На отрезке AB отмечены точки C и D так, что точка C лежит между точками A и D. Точка M не принадлежит прямой AB. Медианы треугольников MAC и MDB, проведенные из вершины M, равны по 11 см. Найдите угол между этими медианами, если $AB = 15$ см, $CD = 7$ см.

Тема. **Признаки равенства треугольников**

а) В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точки M, H и K — середины сторон AB, BC, AC соответственно. Докажите, что $\triangle AMK = \triangle KHC$.

б) Даны треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ с высотами CD и C_1D_1; $\angle B = \angle B_1 = 45°$, $CD = C_1D_1$, $AB = A_1B_1$. Докажите, что $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

в) На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки M и H. Отрезки AH и MC пересекаются в точке D; $MD = DH$, $\angle HAC = \angle MCA$. Можно ли совместить наложением отрезки BM и BH?

Тема. **Сумма углов треугольника**

а) В равнобедренном треугольнике угол при основании на 27° меньше угла, противолежащего основанию. Найдите углы треугольника.

б) В тупоугольном равнобедренном треугольнике один из углов в четыре раза больше другого. Медиана треугольника, проведенная к основанию, равна a. Найдите боковую сторону.

в) Внутри треугольника ABC взята точка M, через которую проведены прямые, пересекающие стороны AB и BC в точках K и E. $\angle MKA = 140°$, $\angle MEC = 130°$, $\angle A = 60°$, $\angle C = 80°$. Найдите $\angle KME$.

Тема. **Смежные углы**

а) Один из смежных углов в пять раз меньше другого. Найдите эти углы.

б) Основание AC равнобедренного треугольника ABC продолжено за вершины A и C. На продолжениях AC соответственно отложены равные отрезки AD и CE. Докажите, что $BD = BE$.

в) На окружности с центром O последовательно взяты точки A, B, C, D, E так, что точки A и E — концы диаметра; $\angle AOC = \angle COE$, $\angle AOB = 60°$, $\angle DOE = 30°$. Докажите, что $BD = AC$.

Тема. **Сумма углов треугольника**

а) В треугольнике ABC $\angle A = 20°$, $\angle B = 100°$. На стороне AB отмечена точка D так, что $\angle ACD = 40°$. Найдите углы треугольника BCD.

б) В треугольнике ABC $\angle A = 100°$. Биссектрисы CC_1 и BB_1 пересекаются в точке D. Найдите угол BDC.

в) На окружности с диаметром AB взята точка C; $\angle CAB = 70°$. Найдите $\angle CBA$ и $\angle ACB$.

Тема. **Задачи на построение**

а) Постройте треугольник по высоте и двум отрезкам, на которые эта высота делит сторону треугольника.

б) Постройте прямоугольный треугольник, у которого один катет равняется данному отрезку, а другой в два раза меньше гипотенузы.

в) Постройте треугольник по двум пересекающимся высотам и меньшему из углов, образованных при пересечении этих высот.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

Самостоятельные работы

С—1

Вар. 1. **4.** Точка пересечения прямых.
Вар. 2. **4.** Нет.
Вар. 3. **3.** Точка D.
Вар. 4. **3.** Точка N.
Вар. 5. **3.** Пересекаются или не имеют общих точек. **4.** Можно.
Вар. 6. **3.** Может. **4.** Может.
Вар. 7. **1.** Шесть, четыре или одну (рис. 213). **2.** 15.
Вар. 8. **1.** Шесть, четыре или одну (рис. 214). **2.** 15.

С—2

Вар. 1. **1.** 1) Три; 2) три.
Вар. 2. **1.** 1) Три; 2) три.
Вар. 3. **1.** 1) 12 неразвернутых углов и 6 развернутых углов.
Вар. 4. **1.** 1) 16 неразвернутых углов и 8 развернутых углов.
Вар. 5. **1.** 12 неразвернутых углов и 3 развернутых угла.
Вар. 6. **1.** 8 неразвернутых углов и 2 развернутых угла.

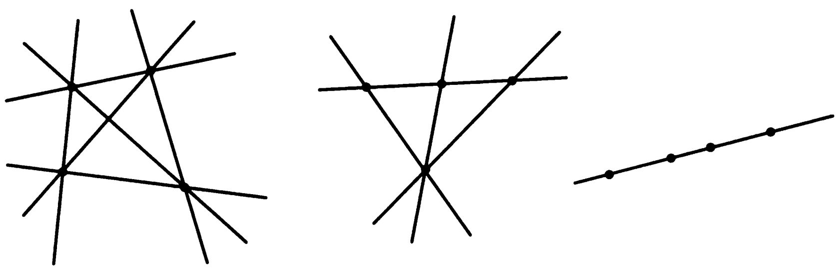

Рис. 213

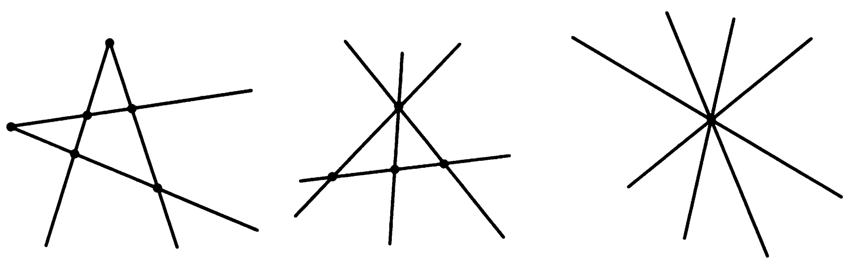

Рис. 214

С—3

Вар. 1. **1.** $AB < DB$. **2.** $\angle AOC = \angle DOB$.
Вар. 2. **1.** $EK > NL$. **2.** $\angle MOK = \angle NOL$.
Вар. 3. **1.** $CE = AB$.
Вар. 4. **1.** $MC = AB$. **2.** Да, является.
Вар. 5. **1.** Да.
Вар. 7. **1.** $BC < AB$ или $BC > AB$. **2.** $\angle MON = \angle AOC$.
Вар. 8. **1.** $BC > AC$ или $BC < AC$. **2.** $\angle AOC = \angle BOD$.

С—4

Вар. 1. **1.** 20 см или 3 см. **2.** 1) 45° или 135°; 2) острым или тупым; 3) да, если луч OC проведен во внутренней области угла AOB.

Вар. 2. **1.** 130 дм или 16 дм. **2.** 1) 60° или 180°; 2) острым или развернутым; 3) да, если луч OC проведен во внутренней области угла AOB.

Вар. 3. **1.** 4,7 дм и 1,6 дм или 3,3 дм и 6,4 дм. **2.** 1) 16°, 64°; 2) 160°, тупым.

Вар. 4. **1.** 44 см и 20 см или 76 см и 100 см. **2.** 1) 25° и 75°; 2) 50°, острым.

Вар. 5. **1.** 102 см.

Вар. 6. **1.** 33 м. **2.** 120°.

Вар. 7. **1.** Точка D лежит между точками A и B, $DB = 3{,}5$ см или точка B лежит между точками A и D, $DB = 7$ см. **2.** 36° и 54°.

Вар. 8. **1.** Точка M лежит между точками A и B, $MB = 4$ см или точка B лежит между точками A и M, $MB = 12$ см. **2.** 45°.

С—5

Вар. 1. **1.** 36° и 144°. **2.** 50°, 40°, 130°.
Вар. 2. **1.** 70° и 110°. **2.** 50°, 50°, 40°.
Вар. 3. **1.** 90°, 60°, 150°. **2.** 80°, 100°, 80°, 100°.
Вар. 4. **1.** 90°, 50°, 40°. **2.** 80°, 100°, 80°, 100°.
Вар. 5. **1.** 45°, 135°. **2.** Да.
Вар. 6. **1.** 135°.

С—6

Вар. 1. **1.** 45°. **2.** $P_{ABC} > P_{ABD}$.
Вар. 2. **1.** 17 см. **2.** $P_{DFK} < P_{EFK}$.
Вар. 3. **1.** 110°. **2.** 12 см, 12 см, 12 см; 12 см, 14 см, 14 см.
Вар. 4. **1.** 20°. **2.** 45 см.
Вар. 5. **1.** 55°. **2.** 10 см или 6 см.
Вар. 6. **1.** 14 см; 90°. **2.** 9 мм или 15 мм.
Вар. 7. **1.** 120°. **2.** 35 см.
Вар. 8. **1.** 110°. **2.** 60 см.

С—7

Вар. 3. **1.** 40°. **2.** Да; да.
Вар. 4. **1.** 110°. **2.** $P_{ABD} = P_{EBD}$.

С—8

Вар. 1. **1.** Для $\triangle ADC$. **2.** $\angle ABC = 81°$, $\angle FEC = 90°$.

Вар. 2. **1.** Для $\triangle EFK$ и $\triangle LFK$. **2.** 20 дм; 65°15′.

Вар. 3. **2.** 135°.

С—9

Вар. 5. **1.** 10 см. **2.** 70°, 70°.

Вар. 6. **1.** 15 дм. **2.** $m = 1$.

С—10

Вар. 1. $BD = B_1D_1$.

Вар. 2. $\angle BDC = \angle B_1D_1C_1$.

Вар. 7. На прямых AC и A_1C_1 за точки A и A_1 отложены отрезки AE и A_1E_1, соответственно равные AB и A_1B_1 (рис. 215). Точки E и B, E_1 и B_1 соединим отрезками, $\triangle EBC = \triangle E_1B_1C_1$, так как $BC = B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$ и $CE = C_1E_1$ ($CE = AC + AB$ и $C_1E_1 = A_1C_1 + A_1B_1$). Из равенства этих треугольников следует, что $EB = E_1B_1$ и $\angle BEC = \angle B_1E_1C_1$. Тогда $\triangle EAB = \triangle E_1A_1B_1$ и $AE = A_1E_1$. В таком случае $AC = A_1C_1$ и дальнейшее доказательство очевидно.

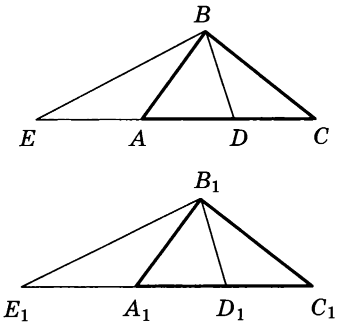

Рис. 215

Вар. 8. Пусть BM и B_1M_1 — медианы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, причем $BM = B_1M_1$. Кроме того, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$ и $\angle MBC = \angle M_1B_1C_1$ (рис. 216). Продолжим BM и B_1M_1, как указано на рисунке, так, что $MD = MB$ и $M_1D_1 = M_1B_1$, $\triangle BMC = \triangle DMA$ и $\triangle B_1M_1C_1 = \triangle D_1M_1A_1$. Отсюда следует, что $\angle BDA = \angle MBC$ и $\angle B_1D_1A_1 = \angle M_1B_1C_1$. Так как $BD = B_1D_1$, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$ и $\angle BDA = \angle B_1D_1A_1$, то $\triangle ABD = \triangle A_1B_1D_1$. Отсюда $AB = A_1B_1$. Аналогично можно доказать, что $BC = B_1C_1$. В таком случае $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними.

С—11

Вар. 7. Точки A, E, K и F лежат на окружности с центром в точке B (рис. 217).

Вар. 8. Точки E, A, C и O лежат на окружности с центром в точке K.

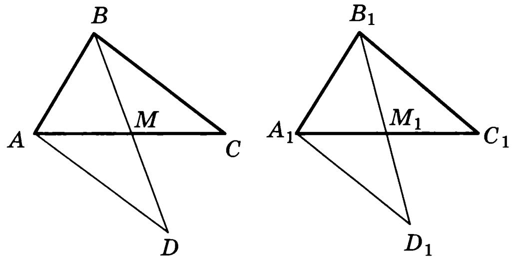

Рис. 216

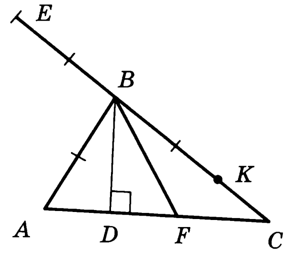

Рис. 217

С—12

Вар. 7. **2.** Необходимо учесть, что $54° : 3 = 18°$ и $54° \cdot 3 = 162°$. Тогда, учитывая, что $162° = 180° - 18°$, легко построить угол в 18° и разделить данный угол в 54° на три равные части.

Вар. 8. **1.** Точка M является точкой пересечения окружности с центром в точке A и радиусом, равным PQ, с биссектрисой угла EOF. Таких точек может быть две, одна или ни одной. **2.** Необходимо учесть, что $35° : 7 = 5°$ и $35° \cdot 5 = 175°$. Тогда, учитывая, что $175° = 180° - 5°$, легко построить угол в 5° и разделить данный угол в 35° на семь равных частей.

С—13

Вар. 1. **1.** 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да.

Вар. 2. **1.** 1) Да; 2) да; 3) да; 4) да.

Вар. 7. Соединим точки A и D, $\triangle AED = \triangle AFD$ по трем сторонам. Отсюда $\angle EAD = \angle DAF$. Так как треугольник AMD равнобедренный, то $\angle EAD = \angle MDA$. В таком случае $\angle MDA = \angle DAF$, тогда $MD \parallel AC$.

Вар. 8. $\triangle ADB = \triangle CEB$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда $AB = BC$, и отсюда $\angle BAC = \angle BCA$. По условию $\angle BAC = \angle MAC$. Поэтому $\angle MAC = \angle BCA$ и $AM \parallel BC$.

С—14

Вар. 1. **1.** Да. **2.** Да. *Вар.* 3. **1.** Да, да.

Вар. 2. **1.** Да. **2.** Да. *Вар.* 4. **1.** Да, да.

Вар. 7. **1.** Соединим точки A и C, B и D, C и E, $\triangle ABC = \triangle BCD = \triangle CDE$ по двум сторонам и углу между ними. Из равенства треугольников вытекает, что $\angle DBC = \angle ACB$ и $\angle BDC = \angle DCE$. Тогда $CA \parallel BD$ и $CE \parallel BD$. Но через точку C можно провести только одну прямую, параллельную BD. Поэтому точки A, C и E лежат на одной прямой.

Вар. 8. **1.** Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7.

С—15

Вар. 1. **1.** 45° и 135°. 2. 45°. *Вар.* 3. **1.** 20°.

Вар. 2. **1.** 58° и 122°. 2. 50°. *Вар.* 4. **1.** 140°.

Вар. 5. **1.** $\triangle DBC$ равнобедренный, а потому $\angle BDC = \angle BCD$. Так как $BE \parallel DC$, то $\angle ABE = \angle BDC$ и $\angle EBC = \angle BCD$. Из этого следует, что $\angle ABE = \angle EBC$, BE — биссектриса равнобедренного треугольника ABC и потому $BE \perp AC$. А так как $DC \parallel BE$, то $DC \perp AC$.

Вар. 6. **1.** Так как $DE \parallel AC$, то $\angle DEA = \angle EAC$, а так как треугольник ADE равнобедренный, то $\angle DEA = \angle DAE$. Тогда имеем, что $\angle DAE = \angle EAC$ и AE — биссектриса равнобедренного треугольника BAC, а потому $AE \perp BC$.

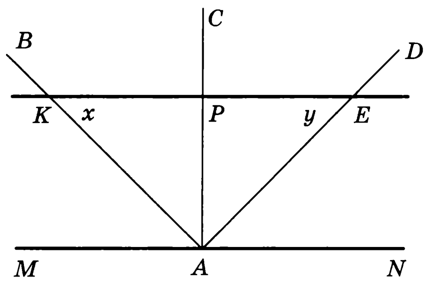

Рис. 218

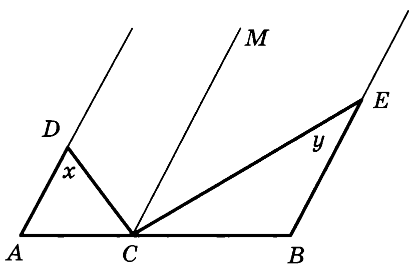

Рис. 219

Вар. 7. Пусть $\angle PKA = x$ и $\angle PEA = y$ (рис. 218). Так как $KP = PA$ и $PE = PA$, то $\angle KAP = x$ и $\angle PAE = y$. По условию $KE \parallel MN$, а потому $\angle KAM = x$ и $\angle EAN = y$. Так как $\angle MAN$ — развернутый угол, то $2x + 2y = 180°$. Отсюда $x + y = 90°$, т. е. $\angle KAE = 90°$ и $AB \perp AD$.

Вар. 8. Через точку C проведем луч CM, параллельный AD и BE (рис. 219). Пусть $\angle ADC = x$ и $\angle CEB = y$. Так как треугольники ADC и CBE равнобедренные, то $\angle ACD = x$ и $\angle BCE = y$. По построению CM параллельна AD и BE, а потому $\angle DCM = x$ и $\angle ECM = y$. $\angle ACB$ развернутый, а потому $2x + 2y = 180°$ и $x + y = 90°$, т. е. $\angle DCE = 90°$ и $DC \perp CE$.

С—16

Вар. 1. **1.** 50°, 130°, 50°. **2.** Нет.

Вар. 2. **1.** 120°, 120°, 120°. **2.** Нет.

Вар. 3. **1.** Нет.

Вар. 4. **1.** Нет.

Вар. 5. **1.** 50°. Указание. Через точку E провести луч EM параллельно лучу CD.

Вар. 6. **1.** 70°.

Вар. 7. Продолжим отрезок BD за точку D и отложим отрезок DE, равный BD. Точки A и E соединим отрезком; $\triangle BDC = \triangle ADE$ по двум сторонам и углу между ними. Отсюда следует, что $\angle CBE = \angle BEA$, а потому $BC \parallel AE$. Так как $AB = 2BD$, то $AB = BE$ и $\triangle ABE$ равнобедренный. Поэтому $\angle BAE = \angle BEA$. По доказанному $BC \parallel AE$, отсюда $\angle EBC = \angle BAE$ и $\angle BAE = \angle CBF$. Таким образом, $\angle EBC = \angle CBF$, т. е. BC — биссектриса угла DBF.

Вар. 8. Задача решается аналогично задаче из варианта 7.

С—17

Вар. 1. **1.** Нет. **2.** Да.

Вар. 2. **1.** Нет. **2.** Да.

Вар. 3. **1.** 130°.

Вар. 4. **1.** 85°.

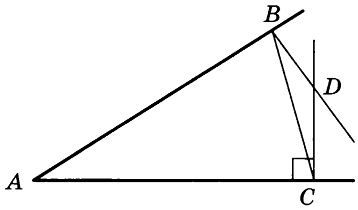

Рис. 220

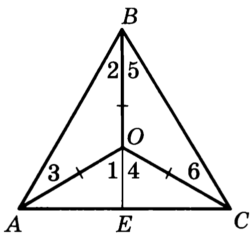

Рис. 221

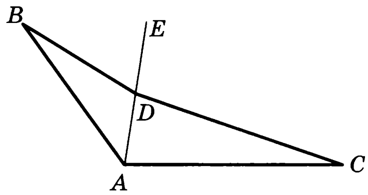

Рис. 222

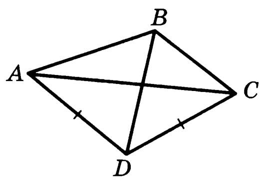

Рис. 223

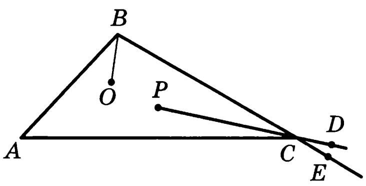

Рис. 224

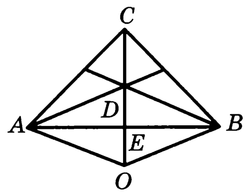

Рис. 225

Вар. 5. **1.** Сумма углов двух треугольников ABC и BCD равна 360° (рис. 220). Значит, $\angle ABD + \angle ACD + \angle A + \angle BDC = 360°$, откуда $\angle BDC = 130°$.

2. Продлим отрезок BO до пересечения со стороной AC в точке E (рис. 221). Тогда $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$, $\angle 4 = \angle 5 + \angle 6$. Так как $OA = OB$ и $OB = OC$, то $\angle 3 = \angle 2$, $\angle 5 = \angle 6$. Тогда $\angle AOC = 2\angle ABC = 120°$.

Вар. 6. **1.** Продлим отрезок AD, как показано на рисунке 222. $\angle BDE = \angle BAD + \angle ABD$, $\angle EDC = \angle CAD + \angle ACD$. Значит, $\angle BDC = \angle ABD + \angle ACD + \angle A = 171°$.

2. Так как $AD = DB$, то $\angle ADB = 180° - 2\angle DBA$ (рис. 223). Аналогично получаем, что $\angle BDC = 180° - 2\angle DBC$. Значит, $\angle ADC = 360° - 2\,(\angle DBA + \angle DBC) = 360° - 2\angle ABC = 100°$.

Вар. 7. **1.** На продолжении стороны BC за точку C отметим точку E (рис. 224). $\angle ACE = \angle A + \angle ABC > \angle ABC$. Но $\angle ABO < \angle ABC$, а $\angle ACE < \angle ACD$, значит, $\angle ACD > \angle ABO$ при любом расположении точек O и P.

2. Пусть E — середина стороны AB (рис. 225). Из того, что $AO = BO$ и $AC = BC$, можно доказать, что точки O, E, D лежат

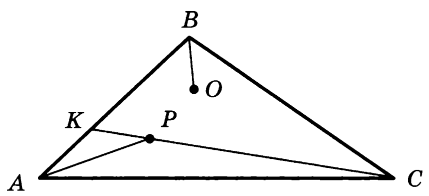

Рис. 226

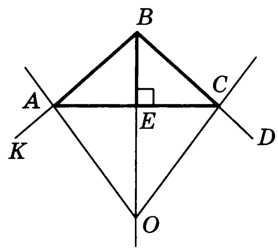

Рис. 227

на одной прямой и $DO \perp AB$. Пусть $\angle AOD = x$. Тогда $\angle ACO = 90° - \frac{x}{2}$, так как $AO = CO$. Из треугольников ACE и AOE получаем, что $\angle CAB = \frac{x}{2}$, $\angle OAE = 90° - x$. Значит, $\angle DAE = \frac{x}{4}$ (так как AD — биссектриса угла CAB). Но треугольники DAE и OAE равны. Следовательно, $90 - x = \frac{x}{4}$, откуда $x = 72$. Значит, можно доказать, что углы треугольника ABC равны 36°, 36° и 108°.

Вар 8. **1.** Так как внешний угол треугольника больше внутреннего несмежного с ним (рис. 226), то $\angle APC > \angle AKP > \angle ABC > \angle OBC$. Ответ. Нельзя.

2. Предположим, что $OA = OB = OC$. Из того, что треугольники ABC и AOC равнобедренные, можно доказать, что середина отрезка AC — точка E (рис. 227) — лежит на прямой BO и $BO \perp AC$. Пусть $\angle AOB = x$, тогда $\angle ABO = 90° - \frac{x}{2}$, так как $AO = OB$. С другой стороны, из треугольника AOE получаем $\angle OAE = 90° - x$, $\angle KAO = 90° - x$ (так как AO — биссектриса угла KAE). Значит, $\angle BAC = 180° - (180° - 2x) = 2x$, откуда $2x = \frac{x}{2}$ и $x = 0$. Полученное противоречие говорит о том, что равенство $OA = OB = OC$ выполняться не может.

С—18

Вар. 1. **1.** $\angle B < \angle K$. **2.** 90°.

Вар. 2. **1.** $AB < PK$. **2.** $AE = BE$.

Вар. 5. **1.** Продлим медиану BD на ее длину, как показано на рисунке 228. Так как треугольники ADE и CDB равны, то $BC = AE$, $\angle CAE = \angle BCA$. Значит, $\angle ABE < \angle BAE$. Следовательно, в треугольнике ABE $BE > AE$, откуда $2BD > BC$.

2. Указание. Докажите, что $BD = BC$, и сравните DK и DB.

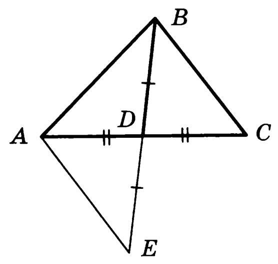

Рис. 228

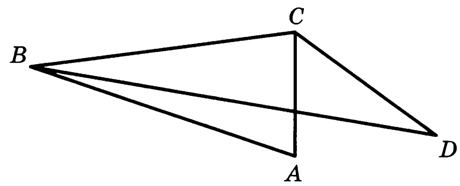

Рис. 229

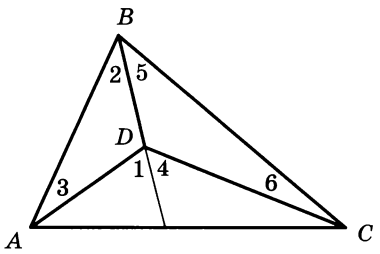

Рис. 230

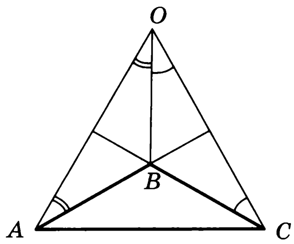

Рис. 231

Вар. 6. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 5.

Вар. 7. **1.** $\angle BCA > \angle ABC$, так как $AB > AC$ (рис. 229). Значит, $\angle BCD > \angle BCA > \angle ABC > \angle DBC$, откуда из треугольника BDC получаем $BD > CD$.

2. Указание. Докажите, что $MA = MB = MC$. Отсюда следует, что медианы треугольника ABC являются его высотами. Значит, треугольник ABC равносторонний.

Вар. 8. **1.** $\angle 1 = \angle 2 + \angle 3$, $\angle 4 = \angle 5 + \angle 6$ (рис. 230). Значит, $\angle 1 > \angle 3$, $\angle 4 > \angle 6$. Отсюда следует, что $\angle ADC > \angle BCD + \angle BAD$. Учитывая условие задачи, получаем, что $\angle ADC > \angle DAC$. Значит, $AC > DC$.

2. Указание. Аналогично, как это сделано в задаче 2 из варианта 5, докажите, что треугольник AOC равносторонний (рис. 231). Ответ. $\angle BCA = 30°$.

С—19

Вар. 1. **1.** Нет. **2.** Нет.

Вар. 2. **1.** Нет. **2.** Нет.

Вар. 3. **1.** Нет.

Вар. 4. **1.** Нет.

Вар. 5. **1.** Продлим отрезок BB_1 на его длину, как показано на рисунке 232. Можно доказать, что треугольники ABB_1 и DCB_1 равны. Учитывая, что $BD < BC + CD$, получаем, что $2BB_1 < BC + AB$.

2. Не может.

Вар. 6. Задачи решаются аналогично задачам из варианта 5.

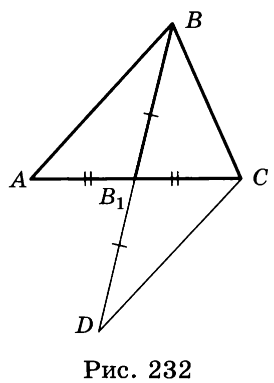

Рис. 232

Вар. 7. **1.** Пусть в треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O. Тогда $AO + OB_1 > AB_1$ и $BO + OA_1 > BA_1$, значит,

$$AO + OB_1 + BO + OA_1 > AB_1 + BA_1.$$

Следовательно, $AA_1 + BB_1 > 0,5\ (AC + BC)$.

2. Пусть прямая AE пересекает сторону BC в точке D, тогда один из углов ADB или ADC не острый. Пусть для определенности это будет угол ADB. Тогда из треугольника ADB $AB > AD$, а из треугольника BEC $EB + EC > BC$. Так как $AB = BC$, то $AD < EB + EC$. Но $EA < AD$.

Вар. 8. **1.** Пусть отрезки AC и BD пересекаются в точке O. Тогда

$$AO + BO > AB,\ AO + OD > AD,\ OD + OC > DC,\ BO + OC > BC.$$

Значит,

$$AO + BO + AO + DO + OD + OC + BO + OC > AB + AD + DC + BC,$$

откуда получаем, что

$$2\ (AC + BD) > AB + AD + DC + BC.$$

2. Пусть прямая AM пересекает сторону BC в точке D. Можно доказать, что $AB > AD > AM$ (см. задачу 2 из варианта 7). С другой стороны, $CE + EB > CB$, но $CB = AB$. Значит, $MA < BE + EC$.

С—20

Вар. 1. **2.** 4 см.
Вар. 2. **2.** 60°.
Вар. 3. **2.** 10 см.
Вар. 4. **2.** 150°.
Вар. 5. **2.** Так как $BD = 2BC$, то $\angle DCB = 30°$ (рис. 233). Значит, $\angle CAB = 30°$. Отсюда получаем, что $AB = 2BC = 4BD$, тогда $AD = AB - BD = 3DB$.

Вар. 6. **1.** $\angle ABB_1 = \angle 1 + \angle 2$, так как $\angle ABB_1$ — внешний угол треугольника ABO (рис. 234). Аналогично $\angle CBB_1 = \angle 3 + \angle 4$. Тогда $\angle ABC = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = \angle AOC + \angle 2 + \angle 4$. Из треугольников AOC_1 и COA_1 получаем $\angle 2 = 90° - \angle AOC$, $\angle 4 = 90° - \angle AOC$. Значит, $\angle ABC = 180° - \angle AOC$.

2. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 5.

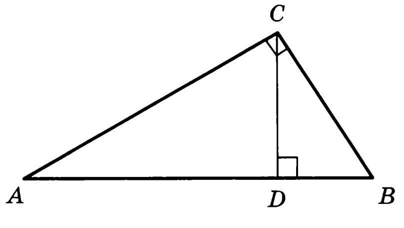

Рис. 233

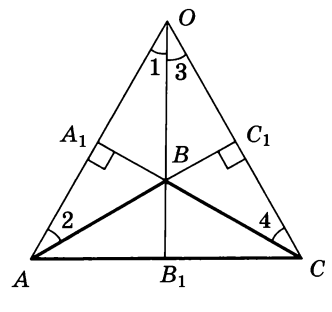

Рис. 234

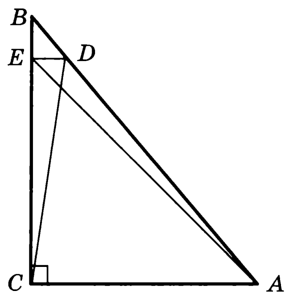

Рис. 235

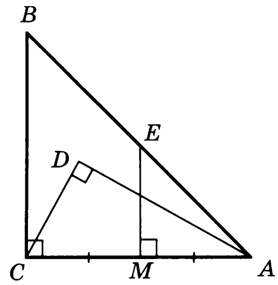

Рис. 236

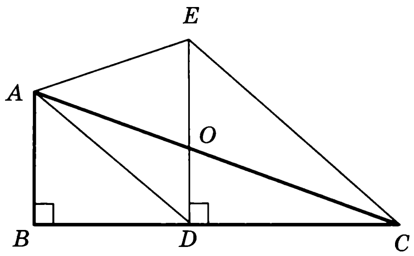

Рис. 237

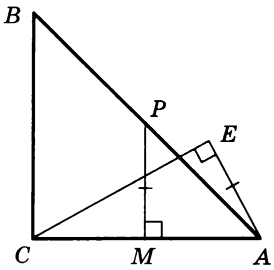

Рис. 238

Вар. 7. **1.** В треугольнике ABC $\angle BAC = 90° - \angle CBA = 50°$ (рис. 235). Тогда $\angle EAC = 45°$, откуда $\angle CEA = 45°$. Значит, $EC = AC$. С другой стороны, $\angle DCA = 80°$ и из треугольника CDA $\angle CDA = 50°$. Следовательно, $CD = CA$, значит, $CE = CD$. Из треугольника CED находим, что $\angle EDC = 85°$.

2. В треугольнике ABC $\angle CAB = 90° - \angle B = 45°$ (рис. 236). В треугольнике AEM $\angle MEA = 90° - \angle MAE = 45°$. Значит, $ME = MA$. В треугольнике CDA $\angle CAD = 90° - \angle DCA = 30°$. Значит, $CD = 0{,}5AC = MA$. Следовательно, $CD = ME$.

Вар. 8. **1.** В треугольнике DOC $\angle OCD = 20°$, в треугольнике ABD $\angle BDA = 40°$ (рис. 237). Значит, $\angle ADE = 50°$ и $\angle ADC = 140°$. Тогда в треугольнике ADC $\angle DAC = 20°$. Следовательно, $DA = DC$. С другой стороны, в треугольнике EDC $\angle ECD = 45°$ и $DC = DE$. Тогда $AD = DE$, и из треугольника DEA имеем $\angle DEA = 65°$.

2. В треугольнике ABC $\angle BAC = 90° - \angle CBA = 45°$ (рис. 238). В треугольнике PMA $\angle MPA = 45°$. Значит, $MP = MA$ и $AC = 2EA$, откуда $\angle ECA = 30°$ и $\angle EAC = 60°$.

С—21

Вар. 5. **1.** Пусть D — середина стороны AB. Тогда треугольники ADE и DBE равны по двум катетам. Следовательно, $AE = BE$. Периметр треугольника AEC равен $AC + AE + CE = AC + BE + CE = AC + BC = AC + 24$, откуда находим, что $AC = 6$ см.

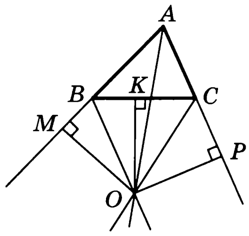

Рис. 239

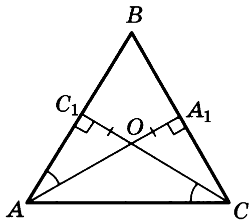

Рис. 240

Вар. 6. **1.** Треугольники ADK и BDK равны по катету и острому углу. Значит, $AD = BD$. Далее задача решается аналогично задаче 1 из варианта 5.

2. Пусть BO и CO — биссектрисы внешних углов при вершинах B и C треугольника ABC (рис. 239). Из точки O проведите перпендикуляры OM, OK, OP на прямые AB, BC, AC соответственно. Докажите сначала, что $OM = OK$ и $OK = OP$, а затем, что $\angle MAO = \angle PAO$.

Вар. 7. **1.** Треугольники ABA_1 и ACC_1 равны по двум катетам. Значит, $AB = AC$. Далее можно доказать, что $BC_1 = A_1C$ и $BC = AC$. Следовательно, треугольник ABC равносторонний и $\angle B = 60°$.

2. Из треугольника ABC находим $\angle C = 90°$. Треугольники BB_1C и B_1AK равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, можно доказать, что $\angle MAM_1 = \angle AA_1C$. Следовательно, треугольники MAM_1 и AA_1C равны по гипотенузе и острому углу. Значит, $AM_1 = A_1C$, а так как A_1 — середина отрезка BC, то $AM_1 = BA_1$.

Вар. 8. **1.** Треугольники AOC_1 и A_1OC равны по катету и острому углу (рис. 240), значит, $\angle OCA_1 = \angle A_1AB$ и $AO = OC$. Следовательно, $CC_1 = AA_1$ и треугольники ACC_1 и ACA_1 равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle A_1AC = \angle C_1CA$. Таким образом, каждый из отрезков AA_1 и CC_1 является одновременно высотой и биссектрисой треугольника ABC. Следовательно, этот треугольник равносторонний и $AC = 2BA_1$.

2. Из треугольника ABC находим, что угол BCA равен 90°. Так как A_1 — середина BC, то $AM_1 = A_1C$ и треугольники AMM_1 и AA_1C равны по катету и гипотенузе. Отсюда можно доказать, что прямые BC и DA параллельны. Следовательно, $\angle DAB = \angle ABC$. Значит, треугольники ADC_1 и BC_1C равны по стороне и двум прилежащим к ней углам и $DC_1 = CC_1$.

С—22

Вар. 1. **1.** $AC > BD$. **2.** а) 4 см; б) 5 см.
Вар. 2. **1.** $AC > BD$. **2.** а) 30°; б) 10 см.
Вар. 3. **1.** $AB > DC$.
Вар. 4. **1.** $PM > KE$.
Вар. 5. **1.** Один из возможных чертежей к задаче изображен на рисунке 241. Из условия $\angle OAD + \angle BOE = 90°$ получаем, что $\angle ADO = 90°$. Треугольники BOE и AOD равны по катету и острому углу. Значит, $AO = EO$, откуда $AB = DE$. Но $AC > AB$, следовательно, $AC > DE$.

2. а) $0{,}5x$; б) $0{,}5x$.

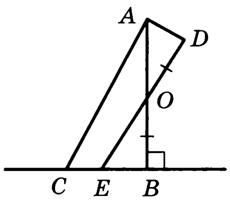

Рис. 241

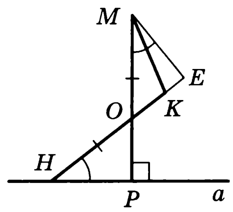

Рис. 242

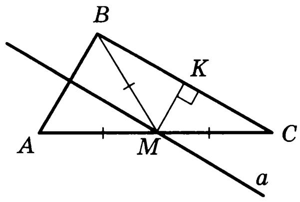

Рис. 243

Вар. 6. **1.** Отложим от луча MP угол EMP, равный углу OHP (рис. 242). Треугольники OME и OHP равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда $OE = OP$ и $HE = MP$, но $HE > HK$, значит, $HK < MP$. Любая наклонная, проведенная из точки M к прямой a, больше MP, и, следовательно, она больше HK.

2. а) Можно доказать, что треугольник ABM равносторонний (рис. 243). Значит, все его углы равны 60°. Зная внешний угол равнобедренного треугольника BMC при вершине M, найдем, что $\angle C = \angle MBC = 30°$. Тогда $\angle ABC = 90°$. Значит, AB — расстояние от точки A до прямой BC. Из треугольника ABM находим, что $AB = x$.

б) Проведем $MK \perp BC$, MK — расстояние между прямыми a и BC. Из треугольника MKC находим, что $MK = 0{,}5x$.

Вар. 7. **1.** Если предположить, что $AB > 2AC$, тогда на продолжении отрезка AC за точку C можно отложить последовательно отрезки CK и KE так, что $CK = AC$ и $AB = AE$ (рис. 244). Треугольники BKC и ACD равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle KBC = 90°$ и $\angle BKC$ острый. Следовательно, $\angle BKC < \angle KBC$. Но $\angle ABE > \angle KBC$, а $\angle BKC > \angle BEC$. Получаем $\angle ABE > \angle BEC$, чего быть не может, так как $AB = AE$. Значит, неравенство $AB > 2AC$ выполняться не может.

2. Пусть прямая a пересекает сторону BC в точке K (рис. 245). Пусть E — середина отрезка MB. Проведем $MT \perp AC$, $EP \perp a$, $EO \perp BC$. Треугольники AMT, MEP, EBO равны по гипотенузе и острому углу. Тогда $MT = EP = BO$. Но $EP = OK$, так как можно доказать, что $EO \parallel a$, значит, $BK = 2MT$, причем BK — это расстояние от точки B до прямой a, а MT — расстояние между прямыми a и AC.

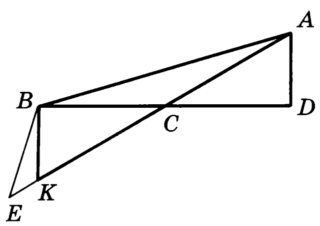

Рис. 244

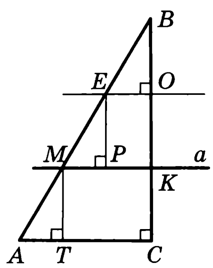

Рис. 245

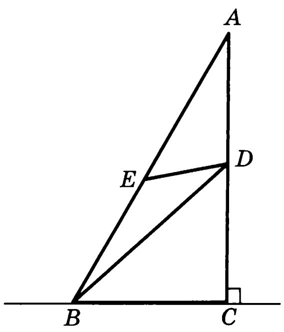

Рис. 246

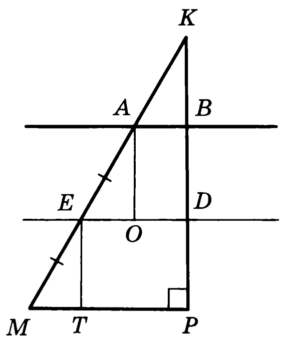

Рис. 247

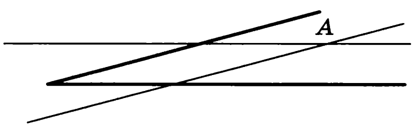

Рис. 248

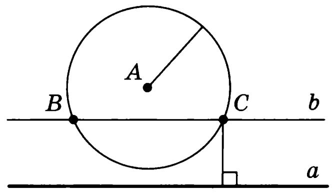

Рис. 249

Вар. 8. **1.** Если $\angle DEA \geqslant 90°$, то и в треугольнике ADE $AD > ED$ (рис. 246). Но $AD < AC < AB$, значит, $ED < AB$. Если $\angle DEA < 90°$, то $\angle DEB$ — тупой и в треугольнике BDE $DB > DE$. С другой стороны, $\angle BDA > \angle BCA = 90°$. Значит, в треугольнике ABD $AB > DB$. Следовательно, $ED < AB$.

2. Здесь E — середина MA, $ED \parallel MP$ (рис. 247), $ET \parallel KP$, $AO \parallel KP$. Далее задача решается аналогично задаче 2 варианта 7.

С—23*

Вар. 1. **1.** Параллельные прямые.

Вар. 2. **1.** Прямую, параллельную прямой AB.

Вар. 5. **1.** $BC \parallel AD$, так как точки B и C равноудалены от прямой AD. Учитывая, что $BO = OC$, можно доказать, что $\angle OCB = \angle OBC$ и $AO = OD$. Треугольники ABC и CBD равны по двум сторонам и углу между ними.

2. Построим две прямые, соответственно параллельные сторонам угла, удаленные от них на расстояние, равное данному отрезку (рис. 248). Точка A пересечения данных прямых будет искомой.

Вар. 6. **2.** Пусть даны прямая a и точка A, не лежащая на ней (рис. 249). Построим окружность с центром A и радиусом, равным данному отрезку, и прямую b, параллельную a, удаленную от прямой a на расстояние, равное данному отрезку. Точки B

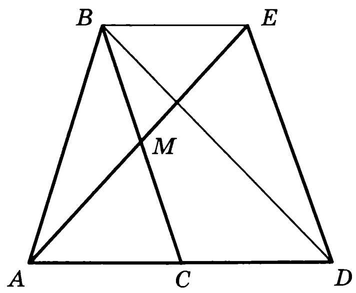

Рис. 250

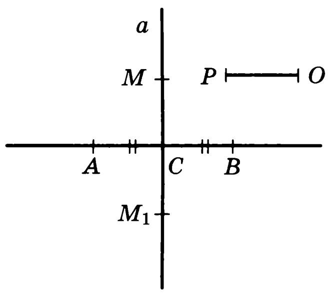

Рис. 251

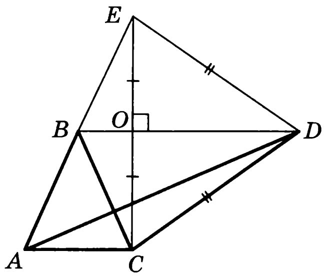

Рис. 252

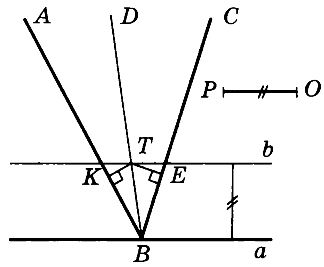

Рис. 253

и C пересечения построенных окружности и прямой b являются искомыми.

Вар. 7. **1.** $BE \parallel AD$, так как точки B и E равноудалены от прямой AD. Проведем отрезки BE и BD (рис. 250). Треугольники BME и AMC равны по стороне и двум прилежащим углам. Значит, $AC = BE = CD$. Треугольники BCD и BED равны по стороне и двум прилежащим углам. Значит, $BC = ED$.

2. Через точку C — середину отрезка AB проведем прямую a, перпендикулярную AB (рис. 251). От точки C на прямой a отложим отрезки MC и M_1C_1, равные PO. Точки M и M_1 будут искомыми. В самом деле, треугольники AMC и BMC равны по двум катетам, значит, $MA = MB$, $MC = PO$ по построению. Аналогично проводится доказательство для точки M_1.

Вар. 8. **1.** $BD \parallel AC$, так как точки B и D равноудалены от прямой AC. Построим $EC \perp BD$, $EO = OC$ (рис. 252). Тогда $ED = CD$, так как треугольники EOD и COD равны по двум катетам. Аналогично $BE = BC$. В треугольнике AED $AE < AD + DE$. Тогда, учитывая доказанное и условие, получаем, что $2BC < AD + DC$.

2. Построение дано на рисунке 253.

С—24

Вар. 5. **1.** Так как $\angle B = 15°$, то треугольник ABC можно построить по стороне AB и двум прилежащим к ней углам.

2. Построим треугольник B_1OC по трем сторонам. Затем построим треугольник BOC по стороне OC, углу BCO, равному углу B_1CO, и углу BOC, смежному с углом B_1OC (рис. 254). Аналогичным образом строим треугольник ABB_1.

Вар. 6. **1.** Если $\angle B = 120°$, $\angle C = 45°$, $\angle A = 15°$. Для построения угла в $15°$ построим произвольный равносторонний треугольник и разделим один из его углов на четыре равные части. Теперь треугольник ABC можно построить по двум сторонам AB и AC и углу между ними.

Вар. 7. **1.** Пусть прямая a пересекает отрезок AB в точке D. Построим отрезок BE, $BE \perp a$, $BO = OE$ (рис. 255). Искомая точка C получается при пересечении прямых a и AE.

2. Построим треугольник MBK по трем сторонам так, чтобы $MB = PK$. Затем построим $BP \parallel MK$, $PK \parallel MB$ (рис. 256). Треугольник PKC построим по стороне PK, углу KPC, смежному с углом BPK, и данному углу PKC. Точку A получим пересечением прямых MB и CK. Треугольник ABC искомый. В самом деле, $MK \parallel BC$, $KP \parallel AB$ по построению. Можно доказать, что треугольники MBK и BPK равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $MB = PK$.

Вар. 8. **1.** Пусть стороны угла A лежат на прямых b и c. Построим отрезок AD с серединой в точке M (рис. 257). Затем через точку D проведем прямую a, параллельную прямой c. B — точка пересечения прямых a и b. Точку C построим как пересечение BM и c. Точки B и C являются искомыми. В самом деле, можно доказать, что треугольники BMD и AMC равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $BM = MC$ и отрезок AM является медианой треугольника ABC.

2. Построим треугольник AMK по трем сторонам так, чтобы $AM = PQ$, $MK = P_1Q_1$, $KA = P_2Q_2$ (рис. 258). Треугольник AMC

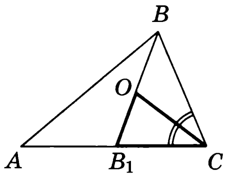

Рис. 254

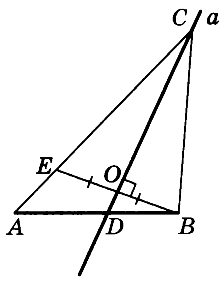

Рис. 255

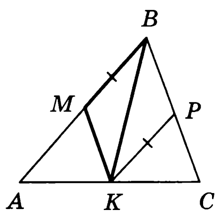

Рис. 256

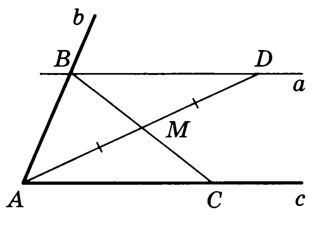

Рис. 257

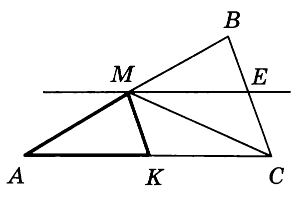

Рис. 258

построим по стороне AM, углу A и углу AMC, равному hk. Построим $ME \parallel AC$, $EC \parallel MK$. Точку B получим как пересечение прямых AM и EC. Треугольник ABC будет искомым.

В самом деле, $ME \parallel AC$ по построению. Можно доказать, что треугольники MKC и MEC равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Значит, $MK = EC$. Кроме того, $\angle AMC$, $AC - ME$, AM равны данным по построению.

С—25*

Вар. 3. **1.** Пусть требуется построить треугольник ABC с прямым углом C по катету BC и медиане BM. Построим сначала треугольник BMC по катету и гипотенузе. Далее построим треугольник ABC по двум катетам BC и $AC = 2MC$.

2. Пусть угол при вершине искомого треугольника равен x. Тогда угол при основании равен $90° - 0{,}5x$. Построив этот угол, можно затем построить искомый треугольник по основанию и двум прилежащим углам.

Вар. 4. **1.** Пусть требуется построить остроугольный треугольник ABC по высоте BM и углам ABM и MBC. Треугольники ABM и CBM строим по катету и прилежащему острому углу. Треугольник ABC будет искомым.

2. Пусть требуется построить треугольник ABC с прямым углом C по высоте CD и углу B. Вначале построим треугольник CBD по катету CD и противолежащему углу B. Треугольник ABC строим по катету BC и острому углу B, прилежащему к этому катету.

Вар. 5. **1.** Пусть даны отрезки P_1O_1 и P_2O_2 и угол hk. Требуется построить треугольник ABC, в котором $AB = P_1O_1$, $\angle A = \angle hk$, $BC = P_2O_2$.

Проведем прямую a, на ней с помощью циркуля отложим отрезок AB, равный отрезку P_1O_1 (рис. 259). Затем построим угол BAM, равный данному углу hk. Далее построим окружность с центром B и радиусом P_2O_2. Соединив точку B с точкой C — точкой пересечения окружности и луча AM, построим искомый треугольник ABC. Задача может не иметь решения, если окружность не пересечет луч AM, или иметь два решения, если окружность пересечет луч AM в двух точках.

2. Пусть требуется построить треугольник ABC по высотам BB_1 и CC_1 и углу A. Построим треугольники ABB_1 и ACC_1 по катету и противолежащему углу (рис. 260). Далее соединим точки B и C отрезком.

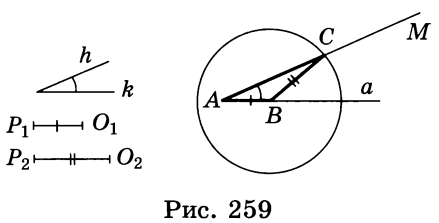

Рис. 259

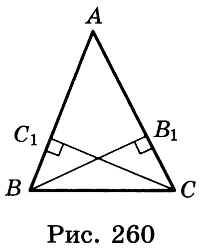

Рис. 260

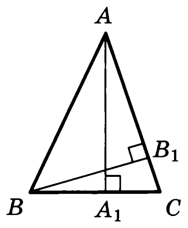

Рис. 261

Вар. 6. **1.** Вначале постройте угол, равный третьему углу треугольника, а затем выполните построение треугольника по стороне и двум прилегающим углам. Задача может не иметь решения, если сумма данных углов не меньше 180°.

2. Пусть требуется построить треугольник ABC по высотам BB_1 и AA_1 и углу A. Построим сначала треугольник ABB_1 по катету и противолежащему углу, а затем треугольник ABA_1 по гипотенузе AB и катету AA_1 (рис. 261). Точка C получается пересечением прямых AB_1 и BA_1.

Вар. 7. **1.** Вначале построим треугольник ABM по двум сторонам AB и BM и углу AMB, противолежащему одной из них. Затем строим треугольник ABC по углам A и BCM и стороне AB.

2. Вначале построим угол C, равный $180° - (\angle B + \angle A)$. Затем построим треугольник CDB по катету BD и противолежащему ему углу C. Треугольник ABC строится по сторонам AC и BC и углу C между ними.

Вар. 8. **1.** Сначала построим треугольник ABM по двум углам ABM и AMB и стороне AM, противолежащей одному из них. Треугольник ABC строится по сторонам AB и BC и углу A, противолежащему стороне BC.

2. Сначала построим треугольник BCD по катету CD и гипотенузе BC. Затем, используя данную разность углов A и B, построим угол hk, равный углу A. После этого построим угол, равный разности прямого угла и построенного угла hk. Угол, равный построенному, отложим от луча CD в сторону, противоположную вершине B. Сторона этого угла пересечет прямую BD в точке A. Треугольник ABC — искомый.

С—26

Вар. 1. **3.** 80°. **4.** $AC > AM$.

Вар. 2. **2.** 70°. **4.** $MB > AK$.

Вар. 3. **2.** $4 < AD < 8$.

Вар. 4. **2.** $5 < EP < 10$. **3.** 5.

Вар. 5. **3.** Треугольник BAD равнобедренный, AC — биссектриса угла BAD. Тогда $AC \perp BD$. Пусть O — точка пересечения отрезков AC и BD. Можно доказать, что $AO = OC$, $BO = OD$, $\angle OBA = \angle OBC$, $\angle ABO > 45°$, так как $\angle ABC > 90°$ и $TC > AT$. Значит, $\angle BAO < 45°$, $\angle ABO > \angle BAO$. Следовательно, $AO > BO$ и $AC > BD$.

4. Если из точки T провести перпендикуляры TM и TK соответственно на прямые AD и AB, то получившиеся прямоугольные треугольники AMT и AHT равны по гипотенузе и острому углу. Отсюда следует, что $TM = TH$.

Вар. 6. **3.** Пусть TP и KM пересекаются в точке A. $TA = AP$, $MK \perp TP$, так как треугольник TMP равнобедренный. Так как

$KT = TM$, то $AK = AM$, $\angle KTA = \angle ATM$, $\angle KTA < 45°$, так как $KO > OM$ и $\angle OTK = 44°$. Значит, $\angle TKA > 45°$. Следовательно, $AT > KA$ и $TP > KM$.

4. Пусть OB и OC — перпендикуляры, проведенные к прямым TM и MP из точки O. Треугольники OBM и OCM равны по гипотенузе и острому углу, значит, $OB = OC$.

Вар. 7. Рис. 262. **1.** Так как $OB = OA$, то $\angle BOA = 180° - 2\angle ABO$, аналогично $\angle COD = 180° - 2\angle OCD$. Значит, $\angle AOB = \angle COD$.

2. $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$, $\angle BOD = \angle COD + \angle BOC$. Значит, $\angle AOC = \angle BOD$. Тогда треугольники AOC и BOD равны по двум сторонам и углу между ними. Следовательно, $AC = BD$.

3. Треугольники ABO и COD равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AB = CD$. Тогда треугольники ABC и BDC равны по трем сторонам. Тогда $\angle DBC = \angle ACB$. Аналогично $\angle CAD = \angle BDA$. Но $\angle DBC = \angle ADB$, так как $BC \parallel AD$. Следовательно, $\angle DBC = \angle CAD$.

4. Проведем перпендикуляры OP и OK из точки O к прямым AD и BC; $AP = PD$, $BK = KC$, так как треугольники AOD и KOC равнобедренные, значит, $PD > KC$. Отметим на отрезке PD точку E так, что $PE = KC$. Проведем $ET \parallel OP$ и $TH \parallel PD$. $PE = HT$, так как $ET \parallel OP$, значит, треугольники OKC и OHT равны по гипотенузе и катету, поэтому $OH = OK$. Так как $OH > OP$, то $OK > OP$.

Вар. 8. **1.** Треугольники KOM и POH (рис. 263) равны по трем сторонам, значит, $\angle KOM = \angle POH$.

2. $\angle POK = \angle KOM - \angle POM$, $\angle MOH = \angle POH - \angle POM$, значит, $\angle POK = \angle MOH$. Тогда треугольники POK и MOH равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $\angle KPO = \angle OMH$. Но $\angle POK + 2\angle KPO = 180°$, так как треугольник PKO равнобедренный. Значит, $\angle POK + 2\angle OMH = 180°$.

3. $PK = MH$, так как треугольники POK и MOH равны. Тогда треугольники KPM и HMP равны по трем сторонам. Значит, $\angle KMP = \angle HPM$. Аналогично $\angle MKH = \angle PHK$. Но так как по условию $\angle MPH = \angle MKH$, то $\angle KMP = \angle MKH$, откуда $PM \parallel KH$.

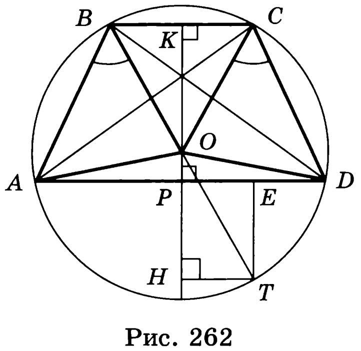

Рис. 262

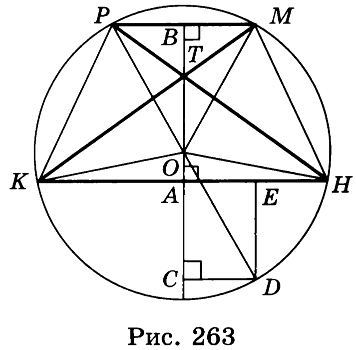

Рис. 263

4. Опустим перпендикуляры OA и OB из точки O на прямые KH и PM соответственно. Тогда $OA < OB$, $AH = AK$, $PB = BM$, так как треугольники POM и KOH равнобедренные. Отложим на луче OA отрезок OC, равный OB (см. рис. 263). Проведем $CD \perp OA$, $DE \parallel AC$. Треугольники OBM и OCD равны по катету и гипотенузе, значит, $BM = CD$. С другой стороны, $AK = CD$, так как $AC \parallel ED$. Но $AE < AH$, следовательно, $BM < AH$ и $PM < KH$.

Контрольные работы

К—1

Вар. 1. **1.** 135°. **2.** $AB > CD$. **3.** а) 50°, 40°; б) углы MOB и COK не являются вертикальными, так как их градусные меры не равны. **4.** Одну, две или три точки (рис. 264).

Вар. 2. **1.** 20°. **2.** 102 мм. **3.** а) 50°, 40°; б) если бы точки A, K, B лежали на одной прямой, то углы AKH и MKB были бы вертикальными, но эти углы не равны. Значит, точки A, K, B не лежат на одной прямой. **4.** См. рис. 265.

Вар. 3. **1.** Да. **2.** $PK = HM$. **3.** а) Да; б) $\angle EOB + \angle POB = \angle POE$. Значит, $\angle POE = 180°$, т. е. угол POE является развернутым и точки P, O, E лежат на одной прямой. Следовательно, углы EOB и POA будут вертикальными. **4.** Можно (рис. 266).

Вар. 4. **1.** 90°. **2.** 125 мм. **3.** а) Да; б) задача решается аналогично задаче 3б варианта 3. **4.** На шесть или семь частей (рис. 264).

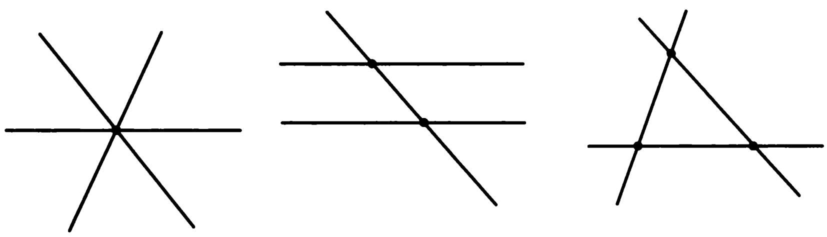

Рис. 264

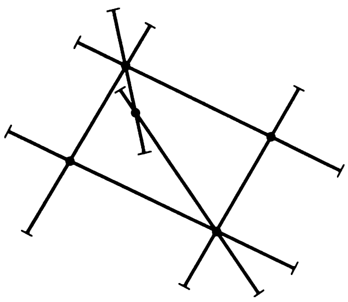

Рис. 265

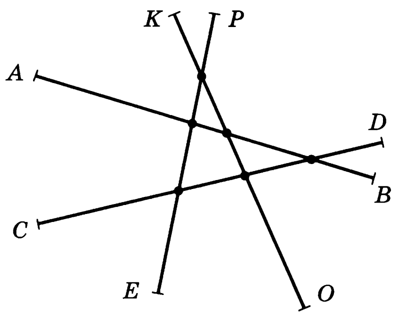

Рис. 266

К—2

Вар. 1. **4.** Построить угол, равный разности прямого и данного, и разделить полученный угол пополам.

Вар. 2. **4.** Разделить прямой угол на восемь равных частей и взять одну из них.

Вар. 3. **4.** Отложить данный угол последовательно 3 раза и вычесть из построенного прямой угол.

Вар. 4. Построить угол, равный 0,25 прямого, и найти разность между прямым и построенным.

К—3

Вар. 1. **1.** 50°. **2.** Не могут. **3.** а) 51°.
Вар. 2. **1.** 40°. **2.** Да.
Вар. 3. **1.** 120°. **2.** Ни одной, так как $a \parallel c$. **3.** а) 63°.
Вар. 4. **1.** 90°. **2.** Одну. **3.** а) 135°.

К—4

Вар. 1. **1.** $AC > BC$. **2.** 30°. **3.** б) По неравенству треугольника $BC < DC + BD = 2BD = 4AB$. **4.** Если все стороны треугольника имеют разные длины, то методом доказательства от противного можно доказать, что один из его углов меньше 60°. Значит, при любом разрезании данного треугольника один из образовавшихся треугольников будет иметь угол меньше 60°, а следовательно, не будет равносторонним. О т в е т: нельзя.

Вар. 2. **1.** $\angle C = 120°$, $\angle A = 40°$, $\angle B = 20°$. **3.** б) Находим $\angle DBC = 60°$. Значит, $BC = DC = AD$, $AB < AC = 2BC$, откуда и следует утверждение, которое требуется доказать. **4.** См. рис. 267. Можно доказать, что при данном составлении равнобедренных прямоугольных треугольников ADP, BDP, BEP и PEC точки P, D и E будут лежать соответственно на отрезках AC, AB, BC, а отрезки AB и BC будут равными. О т в е т: можно.

Вар. 3. **1.** $AB = BC$. **3.** б) Аналогично заданию а) можно доказать, что $\angle ABD = \angle C$. Тогда в треугольнике ABD $AD > BD$, а в треугольнике BCD $BD > DC$. Значит, $AD > DC$. **4.** См. рис. 268. Здесь $\angle BAC = 30°$, $\angle ABD = 30°$, $\angle ABC = 90°$. Можно доказать, что треугольник DBC равносторонний, а треугольник ABD равнобедренный. О т в е т: можно.

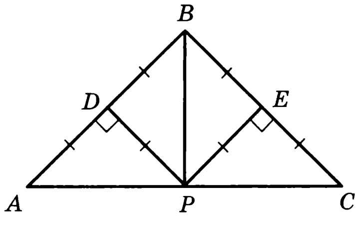

Рис. 267

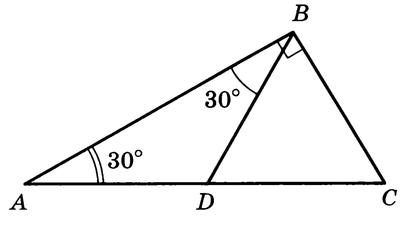

Рис. 268

Вар. 4. **3.** Из треугольника MHC получаем $\angle C < \angle MHC$, значит, $\angle C < \angle BAC$. Тогда в треугольнике ABC $AB < BC$.

4. Треугольник можно разрезать на два треугольника только прямым разрезом, проходящим через вершину. Пусть отрезок AM ($M \in BC$) разделил разносторонний треугольник ABC на два равных треугольника AMB и ABC, тогда $\angle B = \angle C$. Значит, $AB = AC$, чего быть не может. Ответ: нельзя.

К—5

Вар. 1. д) Если предположить, что $AE = EC$, то отрезок ED будет высотой и медианой треугольника AEC. Тогда через точку D на прямой AC будут проведены две прямые BD и DE, перпендикулярные AC, чего быть не может.

Вар. 2. д) Можно доказать, что точка пересечения биссектрис треугольника ABC равноудалена от его вершин.

Вар. 3. д) Так как $\angle BCA = 30°$, $\angle ABC = 90°$, то $AB = 2AC$. Можно доказать, что $BO = AO = OC$. С другой стороны, треугольники BCO и MOA равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $BO = OM$. Таким образом, точка O равноудалена от точек A, B, C, M. Значит, через эти точки можно провести окружность с центром O.

Вар. 4. д) Можно доказать, что треугольники HCO и MOD равны, причем $HO = OM$ и $\angle COH = \angle MOD = 30°$. Тогда $\angle HOM = \angle AOM + \angle AOC + \angle COH = 180°$, значит, точки H, O, M лежат на одной прямой. Следовательно, точка O является серединой отрезка MH.

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

Зив Борис Германович
Мейлер Вениамин Михайлович

ГЕОМЕТРИЯ

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

7 КЛАСС

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. В. Кузнецова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Художники *Е. М. Молчанов, О. В. Корытов, В. А. Андрианов, Е. В. Соганова, О. П. Богомолова*
Технический редактор *С. В. Щербакова*
Корректоры *И. П. Ткаченко, Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 18.05.10. Формат $60 \times 90^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 5,3. Доп. тираж 30 000 экз. Заказ № 30195.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат». 410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

Учебно-методический комплект по геометрии для 7 – 9 классов включает:

Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев, Э.Г. Позняк, И.И. Юдина
УЧЕБНИК ДЛЯ 7 – 9 КЛАССОВ

Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков, И.И. Юдина
РАБОЧИЕ ТЕТРАДИ

Б.Г. Зив, В.М. Мейлер
ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Т.М. Мищенко, А.Д. Блинков
ТЕМАТИЧЕСКИЕ ТЕСТЫ

Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, Ю.А. Глазков, В.Б. Некрвсов, И.И. Юдина
ИЗУЧЕНИЕ ГЕОМЕТРИИ
в 7 – 9 классах

Б.Г. Зив, В.М. Мейлер, А.Г. Баханский
ЗАДАЧИ ПО ГЕОМЕТРИИ
для 7 – 11 классов

ISBN 978-5-09-023439-9
9 785090 234399

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО