

ГЕОМЕТРИЯ

Ю.П. Дудницын
В.Л. Кронгауз

УМК

Контрольные работы по геометрии

К учебнику Л.С. Атанасяна и др.
«Геометрия. 10–11 классы»

10

класс

ЭКЗАМЕН



10

Учебно-методический комплект

Ю.П. Дудницын

В.Л. Кронгауз

Контрольные работы по геометрии

К учебнику Л.С. Атанасяна,
В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева и др.
«Геометрия, 10—11»
(М.: Просвещение)

10 класс

Рекомендовано

Российской Академией Образования

Издание второе, стереотипное

Издательство
«ЭКЗАМЕН»
МОСКВА • 2009

УДК 372.8:514(075.3)

ББК 74.262.22 я72

Д81

Изображение учебного издания «Геометрия, 10–11: учеб. для общеобразоват. учреждений / [Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др.]. — М.: Просвещение» приведено на обложке данного издания исключительно в качестве иллюстративного материала (ст. 1274 п. 1 части четвертой Гражданского кодекса Российской Федерации).

Дудницын, Ю.П.

Д81 Контрольные работы по геометрии: 10 класс: к учебнику Л.С. Атанасяна, В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева и др. «Геометрия, 10—11» / Ю.П. Дудницын, В.Л. Кронгауз. — 2-е изд., стереотип. — М.: Издательство «Экзамен», 2009. — 62, [2] с. (Серия «Учебно-методический комплект»)

ISBN 978-5-377-02207-7

Пособие предназначено учителям математики старших классов, которые ведут преподавание курса геометрии по учебнику Л.С. Атанасяна «Геометрия, 10–11» издательства «Просвещение».

В пособии приведены тематический план и комплект контрольных работ на весь учебный год. Все работы даются в четырех равноценных вариантах, к которым приведены ответы.

В разделе «К учителю» даны подробные рекомендации по оцениванию качества выполнения контрольных работ и по эффективному использованию материалов раздела «Задания к тематическим зачетам», включающего основные теоремы курса и задачи к основным темам курса.

УДК 372.8:514(075.3)

ББК 74.262.22 я72

Формат 84x108/32. Гарнитура «Таймс». Бумага газетная.

Уч.-изд. л. 1,36. Усл. печ. л. 3,36. Тираж 7 000 экз. Заказ № 6148(2)

ISBN 978-5-377-02207-7 © Дудницын Ю.П., Кронгауз В.Л., 2009

© Издательство «ЭКЗАМЕН», 2009

Содержание

К учителю	5
I. Материалы к учебнику «Геометрия 10 – 11»	
Л.С. Атанасяна и др.	11
Примерное поурочное планирование	11
Тематика контрольных работ	15
Контрольная работа № 1	16
Контрольная работа № 2.	18
Контрольная работа № 3.	20
Контрольная работа № 4.	22
Контрольная работа № 5.	24
Контрольная работа № 6.	26
Ответы к контрольным работам.	28
II. Задания к тематическим зачетам.....	31
1. Вопросы (формулировки определений).....	31
2. Теоремы (формулировки и краткие доказательства)	32
3. Задачи.....	33
1. Аксиомы стереометрии.....	33
2. Параллельность прямых в пространстве	35
3. Параллельность прямой и плоскости.....	37
4. Параллельность плоскостей.....	39
5. Перпендикуляр и наклонные	41
6. Свойства точки, равноудаленной от вершин многоугольника	44

Содержание

7. Перпендикулярность прямой и плоскости	46
8. Свойства точки, равноудаленной от сторон многоугольника	48
9. Угол между прямой и плоскостью	50
10. Перпендикулярность плоскостей	52
11. Угол между плоскостями	54
12. Декартовы координаты в пространстве	56
Ответы	57

К учителю

Уважаемые коллеги!

Предлагаемое пособие содержит материалы, которые, как показывает многолетний опыт, целесообразно иметь учителю, ведущему обучение десятиклассников по учебнику — «Геометрия 10 – 11» Л.С. Атанасяна и др. Прежде всего — это поурочное планирование изучения материала, соответствующее учебному плану, по которому работает конкретная школа. Вторая проблема, возникающая перед молодыми учителями, — это осуществление контроля за уровнем знаний десятиклассников. Поэтому мы предлагаем в пособии комплект контрольных работ на весь учебный год. Их содержание полностью соответствует требованиям обязательной подготовки десятиклассников, которые предусмотрены в образовательных стандартах по математике. В контрольных работах реализуются научная и методическая концепции указанного выше учебника.

Авторы пособия предлагают два варианта поурочного планирования к учебнику. Первый — «Вариант А». Он рассчитан на 2 учебных часа в неделю. Его использует большинство средних школ с учебным планом, предусматривающим 5 или 6 учебных часов в неделю на изучение курсов геометрии и алгебры и начал анализа. Второй — «Вариант Б». Он предназначен для тех школ, в которых предусматривается изучение курса математики на базовом уровне (при последовательном рассмотрении разделов из учебников

«Геометрия 10 – 11» и «Алгебра и начала анализа 10 - 11») и выделяются 3 или 4 часа в неделю. В пособии мы предлагаем «Вариант Б», рассчитанный на 1,5 часа в неделю.

После поурочного планирования в материалах к каждому учебнику приводится таблица с указанием тематики контрольных работ и временем, выделяемым на проведение каждой из них.

Далее предлагается полный комплект контрольных работ, в котором каждая работа приведена в 4 равноценных по трудности вариантах.

Первая часть каждой работы, отмеченная значком ▲, содержит материал, соответствующий базовому уровню подготовки десятиклассников по геометрии. Все ученики должны уметь верно выполнять задания этой части. Здесь проверяется усвоение минимального содержания определенной темы, без которого ученик не может успешно усваивать следующие разделы курса геометрии. Например, в первых заданиях контрольных работ № 1 и № 2 проверяется умение десятиклассников правильно изображать простейшие фигуры в пространстве, отражать на чертеже их взаимосвязи, указанные в условии задачи. Вторым шагом выполнения этих заданий является установление соответствующих свойств элементов построенного чертежа и обоснование (доказательство) их логическим путем, ссылкой на нужные элементы теории.

Вторая часть контрольной работы обозначена значком ■. Она состоит из более сложных заданий, выполнение их проводится, как правило, в 2 – 4 этапа. Подобные задания подробно рассматриваются в учебнике и отрабатываются в классе под руководством учителя. Для их выполнения не требуется дополнительных знаний, выходящих за пределы программы. Этот материал должен быть хорошо знаком десятиклассникам.

Последняя часть контрольной работы выделена значком ◆. Эти задания позволяют ученикам проявить высокий уровень знаний, логического мышления, интерес к предмету, способность применить знания в нестандартной ситуации.

Однако и эти задания не предполагают знания каких-либо дополнительных разделов геометрии. Они так же, как и все остальные, проверяют уровень владения программным материалом.

Обращаем внимание учителя на большое число заданий во многих контрольных работах. Десятиклассники успешно справляются с ними, если учитель не увлекается требованиями письменного оформления всех рассуждений, т. е. не требует так называемых «сочинений на геометрическую тему». Навыки грамотного, последовательного обоснования соответствующих выводов формируются постепенно лишь к началу или середине обучения геометрии в 11 классе. В первом полугодии обучения в 10 классе основное внимание необходимо уделить формированию умения выполнять грамотно чертеж, который соответствует условию задачи и является наглядным изображением соотношений между фигурами. Например, в контрольной работе № 1 при выполнении задания 2 ученик должен дать ответ (односложный) и обязательно изобразить требуемую конфигурацию. Только в этом случае задание считается выполненным полностью.

Следует обратить внимание и на то, что требования, связанные с обоснованиями (доказательствами) тех или иных фактов, если они выполняются в несколько этапов, вынесены в ряде контрольных работ в самый конец, т. е. в часть, отмеченную ◆. Этим авторы еще раз подчеркивают, что наличие умения проводить рассуждения дедуктивным методом свидетельствует о высоком уровне развития десятиклассника, о высоком качестве его знаний.

При верном выполнении всех заданий контрольной работы выставляем отметку «5». Если десятиклассники успешно справились со всеми заданиями первой и второй частей работы, а к выполнению последней не приступали или допустили ошибку, которая не привела к принципиально неверному решению, выставляем отметку «4». За безошибочное выполнение всех заданий первой части контрольной работы, даже при наличии ошибок в решениях заданий второй и третьей частей или отсутствии этих решений, выставляем отметку «3» или «зачет», которые свидетельствуют, что обязательное минимальное содержание данной темы курса десятиклассник усвоил. Еще раз подчеркнем, что **любая из перечисленных отметок может быть выставлена при условии верного выполнения всех заданий первой части работы.**

Десятиклассникам, которые допускают ошибки при выполнении заданий первой части работы и не получают отметку «3» или «зачет», учитель может дать возможность после выполнения работы над допущенными ошибками вторично выполнить задание, аналогичное тому, где допущена ошибка. Для этого удобно использовать соответствующие задания других трех вариантов контрольной работы. При таком подходе ученики более ответственно относятся к выполнению работы над ошибками, и она становится более целенаправленной.

В классах, где изучается предмет «Математика» на базовом уровне и выделено в неделю 3 – 4 учебных часа, целесообразно сократить объем большинства контрольных работ, исключив задание, отмеченное знаком **◆**.

Предложенная Вам система выставления отметок за выполнение контрольной работы значительно повышает информативность каждой отметки. Они более точно и определенно характеризуют уровень усвоения основных порций материала по теме каждым учеником. Содержание контрольных работ и

система оценивания их выполнения десятиклассниками обеспечивают благоприятную в психологическом отношении обстановку во время проведения работ.

Заключительная часть пособия «Задания к тематическим зачетам» адресована учителям, которые в своей практике успешно применяют систему зачетов в дополнение к контрольным работам для поэтапного определения уровня знаний школьников, интенсификации и повышения эффективности их занятий. Эта часть пособия содержит три раздела: «Вопросы», «Теоремы» и «Задачи». Эти материалы используются для составления индивидуальных карточек к зачетам по основным темам программы. Первые два раздела содержат названия отдельных элементов теоретического материала. Первая группа «Вопросы (формулировки, примеры)» предлагается ученику, чтобы он только сформулировал соответствующее определение, свойство или привел конкретный пример, их иллюстрирующий. Вторая группа «Теоремы» содержит перечень основных теорем, содержащихся в курсе. Задание из этой группы предлагается десятикласснику для того, чтобы он воспроизвел необходимый чертеж и полное доказательство этого утверждения. Третий раздел содержит 104 задачи, которые сгруппированы по двенадцати основным темам курса.

Используя предложенные материалы, учитель имеет возможность подготовить для проведения зачета по конкретной теме необходимое количество индивидуальных карточек, на которых записаны задания для каждого ученика. Форму проведения зачета (устно или письменно) определяет в каждом конкретном случае учитель. Видимо, и место зачетов в учебном процессе может быть различным в зависимости от объема темы, ее значимости во всем курсе геометрии. Многие учителя охотно используют зачеты, так как с их помощью проверя-

ется формальное усвоение теории: знание формулировок определений, теорем и свойств, умение воспроизводить несложные доказательства теорем. Однако напоминаем, что в настоящее время по-прежнему основной формой контроля за уровнем знаний десятиклассников в течение всего учебного года является проведение тематических и итоговых контрольных работ.

Авторы

I. МАТЕРИАЛЫ К УЧЕБНИКУ «ГЕОМЕТРИЯ 10 – 11» Л.С. АТАНАСЯНА И ДР.

Примерное поурочное планирование

Вариант А (2 ч в неделю, всего 68 ч)

Вариант Б (1,5 ч в неделю, всего 51 ч)

Тема	Вариант А	Вариант Б
Введение Аксиомы стереометрии и их следствия Предмет стереометрии. Основные понятия и аксиомы стереометрии Некоторые следствия из аксиом стереометрии. Решение задач.	2 ч	1 ч
<u>Контрольная работа № 1</u> (20–25 мин)	4 ч	3 ч
<i>Глава I. Параллельность прямых и плоскостей</i>		
§ 1. Параллельность прямых, прямой и плоскости		
Параллельные прямые в пространстве. Параллельность трех прямых.	2 ч	1 ч
Параллельность прямой и плоскости.	2 ч	1 ч

* Разделы, названия которых подчеркнуты, можно не рассматривать при использовании варианта Б поурочного планирования (изучение геометрии на базовом уровне).

Тема	Вариант А	Вариант Б
§ 2. Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми		
Скрещивающиеся прямые	1 ч	1 ч
Углы с сонаправленными сторонами. Угол между прямыми. Решение задач.	3 ч	2 ч
Контрольная работа № 2	1 ч	1 ч
§ 3. Параллельность плоскостей		
Параллельные плоскости. Свойства параллельных плоскостей.	3 ч	2 ч
§ 4. Тетраэдр. Параллелепипед		
Тетраэдр. Параллелепипед.	2 ч	2 ч
Задачи на построение сечений. Решение задач по всей теме.	3 ч	2 ч
Контрольная работа № 3	1 ч	1 ч
Глава II. Перпендикулярность прямых и плоскостей		
§ 1. Перпендикулярность прямой и плоскости		
Перпендикулярные прямые в пространстве. <u>Параллельные прямые, перпендикулярные к плоскости.</u>	2 ч	1 ч
Признак перпендикулярности прямой и плоскости. <u>Теорема о прямой, перпендикулярной к плоскости.</u>	2 ч	1 ч

Тема	Вариант А	Вариант Б
§ 2. Перпендикуляр и наклонные. Угол между прямой и плоскостью		
Расстояние от точки до плоскости.	1 ч	1 ч
Теорема о трех перпендикулярах.	2 ч	2 ч
Угол между прямой и плоскостью.	3 ч	2 ч
§ 3. Двугранный угол. Перпендикулярность плоскостей		
Двугранный угол.	2 ч	1 ч
Признак перпендикулярности двух плоскостей.	2 ч	2 ч
Прямоугольный параллелепипед. Решение задач по всей теме.	3 ч	2 ч
Контрольная работа № 4	1 ч	1 ч
Глава III. Многогранники		
§ 1. Понятие многогранника. Призма		
Понятие многогранника. Призма, площадь поверхности призмы.	4 ч	3 ч
§ 2. Пирамида		
Пирамида. Правильная пирамида.	2 ч	1 ч
Усеченная пирамида. Площадь поверхности пирамиды.	3 ч	2 ч
§ 3. Правильные многогранники		
Симметрия в пространстве. Понятие правильного многогранника. Элементы симметрии правильных многогранников.	2 ч	1 ч

Тема	Вариант А	Вариант Б
Решение задач по всей теме.	2 ч	2 ч
Контрольная работа № 5	1 ч	1 ч
Глава IV. Векторы в пространстве		
§ 1. Понятие вектора в пространстве		
Понятие вектора. Равенство векторов.	2 ч	1 ч
§ 2. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число		
Сложение и вычитание векторов. Сумма нескольких векторов. Умножение вектора на число.	4 ч	4 ч
Заключительное повторение курса геометрии 10 класса		
Контрольная работа № 6	6 ч	6 ч

Тематика контрольных работ

№	Тема	Время
1	Аксиомы стереометрии и их следствия	20 – 25 мин
2	Параллельность прямых, прямой и плоскости. Угол между прямыми	1 урок
3	Параллельность плоскостей. Тетраэдр. Параллелепипед	1 урок
4	Перпендикулярность прямой и плоскости. Двугранный угол	1 урок
5	Призма. Пирамида. Площадь поверхности призмы и пирамиды	1 урок
6	Заключительное повторение	1 урок

КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ

Контрольная работа № 1

Вариант 1

- ▲ 1. Даны прямая a и точка K , которая не лежит на этой прямой. Через точку K проведены прямые m и l , пересекающие прямую a . Докажите, что прямые a , m и l лежат в одной плоскости.
- 2. а) Можно ли провести через середину стороны треугольника прямую, которая не имеет общих точек с другой его стороной?
- ◆ б) Поясните ответ.

Вариант 2

- ▲ 1 Прямая m пересекает лучи AB , AC и AD в точках K , P и T . Докажите, что точки A , K , P и T лежат в одной плоскости.
- 2. а) Можно ли провести через точку пересечения диагоналей прямоугольника прямую, которая не имеет с его сторонами общих точек?
- ◆ б) Поясните ответ.

Вариант 3

- ▲ 1. Точки M , N и P лежат на прямой a . Точка A не лежит на этой прямой. Докажите, что точки A , M , N и P расположены в одной плоскости.
- 2. а) Можно ли провести через середину медианы треугольника прямую, которая не имеет общих точек с его сторонами?
- ◆ б) Поясните ответ.

Вариант 4

- ▲ 1. Прямые k и l пересекаются в точке O . Прямая a пересекает их в точках M и P , а прямая b — в точках C и D . Докажите, что прямые a и b лежат в одной плоскости.
- 2. а) Можно ли провести через середину диагонали квадрата прямую, которая не имеет общих точек с его сторонами?
- ◆ б) Поясните ответ

Контрольная работа № 2

Вариант 1

- ▲ 1. Основание AD трапеции $ABCD$ лежит в плоскости α . Вершина C не лежит в этой плоскости. Через середины боковых сторон трапеции проведена прямая m . Докажите, что прямая m параллельна плоскости α .
- 2. Дан треугольник MPK . Плоскость, параллельная прямой MK , пересекает сторону MP в точке M_1 , а сторону PK — в точке K_1 . Вычислите длину отрезка M_1K_1 , если $MK = 27$ см, $PK_1 : K_1K = 5 : 4$.
- ◆ 3. Точка O не лежит в плоскости параллелограмма $ABCD$. Как расположены прямые AB и p , проходящие через середины отрезков OC и OD ? Найдите угол между прямыми p и BC , если $\angle BAD = 130^\circ$.

Вариант 2

- ▲ 1. Вершины B и C треугольника ABC лежат в плоскости β . Вершина A ей не принадлежит. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AB и AC , параллельна плоскости β .
- 2. Дан треугольник ABC . Плоскость, параллельная прямой AC , пересекает сторону AB в точке A_1 , а сторону BC — в точке C_1 . Вычислите длину отрезка BC_1 , если $CC_1 = 20$ см, $A_1C_1 : AC = 3 : 7$.
- ◆ 3. Точка O не принадлежит плоскости равнобедренной трапеции $KMPT$ ($KT \parallel MP$). Как расположены прямые, одна из которых содержит среднюю линию трапеции, а другая — середины отрезков OM и OP ? Найдите угол между прямой MK и прямой, содержащей середины отрезков OM и OP , если $\angle MPT = 110^\circ$.

Вариант 3

- ▲ 1. Точка M не принадлежит плоскости прямоугольника $ABCD$. Прямая a проходит через точку M и параллельна прямой AC . Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков MA и MC , параллельна плоскости прямоугольника.
- 2. Дан треугольник $СКР$. Плоскость, параллельная прямой PK , пересекает сторону CP в точке E , а сторону KC — в точке F . Вычислите длину отрезка PK , если $EF = 14$ дм, $CE : EP = 2 : 5$.
- ◆ 3. Точка A не лежит в плоскости ромба $BCDE$. Как расположены прямая BD и прямая m , которая проходит через середины отрезков AB и AC ? Найдите угол между прямыми m и BD , если $\angle CDE = 120^\circ$.

Вариант 4

- ▲ 1. Отрезок MP расположен в плоскости α . Точка K не лежит в ней. Докажите, что прямая, проходящая через середины отрезков AM и AP , параллельна плоскости α .
- 2. Дан треугольник EFT . Плоскость, параллельная прямой FT , пересекает сторону EF в точке D , а сторону ET — в точке C . Вычислите длину отрезка CD , если $FT = 24$ дм, $DE : EF = 1 : 3$.
- ◆ 3. Точка M не лежит в плоскости квадрата $ABCD$. Как расположены прямая AC и прямая, проходящая через середины отрезков MA и MB ? Найдите угол между этими прямыми.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

- ▲ 1. Через точку K , лежащую между параллельными плоскостями α и β , проведены прямые a и b . Первая прямая пересекает плоскости α и β в точках A_1 и B_1 соответственно, вторая — в точках A_2 и B_2 . Вычислите длину отрезка KB_2 , если $A_1A_2 : B_1B_2 = 3 : 5$, $A_2B_2 = 16$ см.
- 2. Дан параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Постройте сечение этого параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину ребра AB и параллельной плоскости ACC_1 .
- ◆ 3. Верно ли утверждение, что прямая, лежащая в одной из параллельных плоскостей, параллельна другой плоскости? (Ответ обоснуйте).

Вариант 2

- ▲ 1. Луч KM пересекает параллельные плоскости α и β в точках M_1 и M_2 , а луч KP — в точках P_1 и P_2 соответственно. Вычислите длину отрезка M_1M_2 , если $KM_1 = 8$ см, $M_1P_1 : M_2P_2 = 4 : 9$.
- 2. Дан тетраэдр $ABCD$. Точка M — середина ребра DC , точка K — середина ребра AD . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, содержащей точку K и параллельной плоскости AMB .
- ◆ 3. Прямые a и b расположены соответственно в параллельных плоскостях α и β . Верно ли, что эти прямые не имеют общих точек? (Ответ обоснуйте).

Вариант 3

- ▲ 1. Через точку D , лежащую между параллельными плоскостями α и β , проведены прямые m и k . Прямая m пересекает плоскости α и β в точках M_1 и M_2 соответственно, а прямая k — в точках K_1 и K_2 соответственно. Вычислите длину отрезка DM_2 , если $M_1M_2 = 20$ дм, $M_1K_1 : M_2K_2 = 3 : 7$.
- 2. Дан параллелепипед $MNPQM_1N_1P_1Q_1$. Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через середину ребра MN и параллельной плоскости QNN_1 .
- ◆ 3. В одной из параллельных плоскостей проведена прямая. Верно ли, что она параллельна второй плоскости? (Ответ обоснуйте).

Вариант 4

- ▲ 1. Луч AB пересекает параллельные плоскости α и β в точках B_1 и B_2 соответственно, а луч AC пересекает их в точках C_1 и C_2 соответственно. Вычислите длину отрезка C_1C_2 , если $AC_1 = 9$ дм, $B_1C_1 : B_2C_2 = 3 : 5$.
- 2. Дан тетраэдр $MKPT$. Точка A — середина ребра MP , точка B — середина ребра PT . Постройте сечение тетраэдра плоскостью, содержащей точки A , B и параллельной плоскости MKT .
- ◆ 3. Плоскости α и β параллельны. Прямая m лежит в плоскости α , а прямая k — в плоскости β . Верно ли, что прямые m и k не пересекаются? (Ответ обоснуйте).

Контрольная работа № 4

Вариант 1

- ▲ 1. Через середину M стороны AD квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр MK , равный $6\sqrt{3}$ см. Сторона квадрата равна 12 см. Вычислите:
- а) расстояние от точки K до прямой BC ;
 - б) площади треугольника AKB и его проекции на плоскость квадрата;
- в) расстояние между прямыми AK и BC .
- ◆ 2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. $AC = 13$ см, $DC = 5$ см, $AA_1 = 12\sqrt{3}$ см. Вычислите градусную меру двугранного угла $ADCA_1$.

Вариант 2

- ▲ 1. Через середину E гипотенузы AB прямоугольного треугольника ABC проведен к его плоскости перпендикуляр EM , равный $4\sqrt{5}$ см. $AB = BC = 16$ см, $\angle C = 90^\circ$. Вычислите:
- а) расстояние от точки M до прямой AC ;
 - б) площади треугольника ACM и его проекции на плоскость данного треугольника;
- в) расстояние между прямыми EM и BC .
- ◆ 2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, основание которого квадрат. $AC = 6\sqrt{2}$ см, $AB_1 = 4\sqrt{3}$ см. Вычислите градусную меру двугранного угла $B_1 ADB$.

Вариант 3

- ▲ 1. В прямоугольнике $ABCD$ $AD = 10$ см, $AB = 12$ см. Через середину K стороны BC проведен перпендикуляр MK к его плоскости, равный 5 см. Вычислите:
- а) расстояние от точки M до прямой AD ;
 - б) площади треугольника AMB и его проекции на плоскость данного прямоугольника;
- в) расстояние между прямыми BM и AD .
- ◆ 2. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ $AC = 10$ дм, $DC = 6$ дм, $AA_1 = 8\sqrt{3}$ дм. Вычислите градусную меру двугранного угла $DABD_1$.

Вариант 4

- ▲ 1. Через точку пересечения диагоналей квадрата $MNPQ$ (точку O) проведен перпендикуляр OD к его плоскости. $OD = 8$ см, $MN = 12$ см. Вычислите:
- а) расстояние от точки D до прямой NP ;
 - б) площади треугольника MDN и его проекции на плоскость квадрата;
- в) расстояние между прямыми OD и MN .
- ◆ 2. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является квадрат, диагональ которого равна $12\sqrt{2}$ дм. Диагональ боковой грани параллелепипеда равна $8\sqrt{3}$ дм. Вычислите градусную меру двугранного угла $D_1 ABD$.

Контрольная работа № 5

Вариант 1

- ▲ 1. Высота правильной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 10 см. Сторона ее основания — 12 см. Вычислите периметр сечения призмы плоскостью, содержащей прямую AB и середину ребра CC_1 .
2. Высота правильной треугольной пирамиды равна 6 см. Радиус окружности, описанной около ее основания, — $4\sqrt{3}$. Вычислите:
- а) длину бокового ребра пирамиды;
 - б) площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Основание пирамиды $MABCD$ — квадрат, сторона которого равна 12 см. Боковое ребро MD перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Угол между плоскостями основания и грани MAB равен 30° . Вычислите:
- а) расстояние от вершины пирамиды до прямой AC ;
 - б) площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант 2

- ▲ 1. Высота правильной призмы $KMPK_1 M_1 P_1$ равна 15 см. Сторона ее основания — $8\sqrt{3}$ см. Вычислите периметр сечения призмы плоскостью, содержащей прямую PP_1 и середину ребра KM .
2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 8 см, сторона ее основания — 12 см. Вычислите:
- а) длину бокового ребра пирамиды;
 - б) площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Ребро MA пирамиды $MABC$ перпендикулярно плоскости ее основания. $AB = BC = 18$ см, $\angle BAC = 90^\circ$. Угол между плоскостями основания и грани MBC равен 45° . Вычислите:
- а) расстояние от вершины пирамиды до прямой BC ;
 - б) площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант 3

- ▲ 1. Высота правильной призмы $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равна 16 см. Сторона ее основания — 15 см. Вычислите периметр сечения призмы плоскостью, содержащей прямую $A_1 B_1$ и середину ребра DD_1 .
2. Высота правильной треугольной пирамиды равна 8 см. Радиус окружности, описанной около ее основания — $8\sqrt{3}$ см. Вычислите:
- а) длину бокового ребра пирамиды;
- б) площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Основанием пирамиды $MKPNT$ является квадрат, сторона которого равна 24 см. Боковое ребро MK перпендикулярно плоскости основания пирамиды. Угол между плоскостями основания и грани MTN равен 45° . Вычислите:
- а) расстояние от вершины пирамиды до прямой PT ;
- ◆ б) площадь полной поверхности пирамиды.

Вариант 4

- ▲ 1. Высота правильной призмы $MPKM_1 P_1 K_1$ равна 12 см. Сторона ее основания — $6\sqrt{3}$ см. Вычислите периметр сечения призмы плоскостью, содержащей прямую PP_1 и середину ребра MK .
2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 16 см. Сторона ее основания — 24 см. Вычислите:
- а) длину бокового ребра пирамиды,
- б) площадь боковой поверхности пирамиды.
3. Ребро MC пирамиды $MABCD$ перпендикулярно плоскости ее основания. $AC = 15$ см, $BC = 20$ см, $\angle ACB = 90^\circ$ Угол между плоскостями основания и грани MAB равен 60° Вычислите:
- а) расстояние от вершины пирамиды до прямой AB ;
- ◆ б) площадь полной поверхности пирамиды.

Контрольная работа № 6

Вариант 1

1. Высота правильной треугольной пирамиды равна 6 см. Сторона ее основания — $8\sqrt{3}$ см. Вычислите длину ребра этой пирамиды.
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено сечение плоскостью, содержащей прямую BD и вершину C_1 . Угол между плоскостями сечения и основания равен 60° . $AB = 8$ см, $BC = 6$ см. Вычислите площадь сечения.
3. Через центр O квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр KO . Угол между прямой KC и плоскостью квадрата равен 60° . $AB = 18$ см. Вычислите угол между плоскостями:
 - а) AKC и DKB ;
 - б) ABC и BKC .

Вариант 2

1. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 16 см. Сторона основания пирамиды — 24 см. Вычислите расстояние от вершины пирамиды до:
 - а) сторон основания;
 - б) до вершин основания.
2. Сторона основания правильной треугольной призмы $MPKM_1 P_1 K_1$ равна 12 см. Вычислите площадь сечения призмы плоскостью MPK , если угол между плоскостями сечения и основания равен 45° .
3. Через вершину D тупого угла ромба $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр DM , равный 9,6 дм. Диагонали ромба равны 12 дм и 16 дм. Вычислите величину угла между плоскостями:
 - а) ABC и MDC ;
 - б) ABC и CBM .

Вариант 3

1. Высота треугольной пирамиды равна 12 м. Радиус окружности, вписанной в основание пирамиды, равен 5 см. Вычислите расстояние от вершины пирамиды до сторон ее основания.
2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведено сечение плоскостью, содержащей прямую AC и вершину D_1 . Угол между плоскостями сечения и основания равен 45° . Стороны основания параллелепипеда равны 12 дм и 16 дм. Вычислите площадь сечения.
3. Через катет равнобедренного прямоугольного треугольника проведена плоскость α . Угол между плоскостями треугольника и α равен 60° . Вычислите длины проекций сторон данного треугольника на плоскость α , если длина катета данного треугольника равна 10 дм.

Вариант 4

1. Основанием четырехугольной пирамиды является прямоугольник, стороны которого равны 8 дм и $4\sqrt{5}$ дм. Боковые ребра пирамиды равны 10 дм. Вычислите длину высоты данной пирамиды.
2. Сторона основания правильной треугольной призмы $DCED_1 C_1 E_1$ равна 10 дм. Вычислите площадь сечения призмы плоскостью DCE , если угол между плоскостями сечения и основания равен 30° .
3. Сторона AC правильного треугольника ABC лежит в плоскости α . Угол между плоскостями треугольника и α равен 60° . $AC=12$ м.
Вычислите:
а) расстояние от точки B до плоскости α ;
б) площадь проекции треугольника ABC на плоскость α

Ответы к контрольным работам

Контрольная работа № 1

Вариант 1

2. а) Можно.

Вариант 3

2. а) Можно.

Вариант 2

2. а) Можно.

Вариант 4

2. а) Можно.

Контрольная работа № 2

Вариант 1

2. 15 см. 3. 50°.

Вариант 3

2. 49 дм. 3. 30°.

Вариант 2

2. 15 см. 3. 70°.

Вариант 4

2. 8 дм. 3. 45°.

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. 10 см. 3. Верно.

Вариант 3

1. 14 дм. 3. Верно.

Вариант 2

1. 10 см. 3. Верно.

Вариант 4

1. 6 дм. 3. Верно.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. а) $6\sqrt{7}$ см; б) $72 \text{ см}^2, 36 \text{ см}^2$; в) 12 см. 2. 60° .

Вариант 2

1. а) 12 см; б) 96 см^2 , 64 см^2 ; в) 8 см. 2. 30°

Вариант 3

1. а) 13 см; б) $30\sqrt{2} \text{ см}^2$, 30 см^2 ; в) 12 см. 2. 60°

Вариант 4

1. а) 10 см; б) $72\sqrt{34} \text{ см}^2$, 36 см^2 ; в) 6 см. 2. 30° .

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. 50 см. 2. а) $2\sqrt{21} \text{ см}$; б) $72\sqrt{3} \text{ см}^2$.

3. а) $6\sqrt{10} \text{ см}$; б) $432(1 + \sqrt{3}) \text{ см}^2$.

Вариант 2

1. 54 см. 2. а) $2\sqrt{34} \text{ см}$; б) 240 см^2 .

3. а) 18 см; б) $162(1 + 2\sqrt{2}) \text{ см}^2$.

Вариант 3

1. 64 см. 2. а) 16 см; б) $144\sqrt{7} \text{ см}^2$.

3. а) $12\sqrt{6} \text{ см}$; б) $576(2 + \sqrt{2}) \text{ см}^2$.

Вариант 4

1. 42 см. 2. а) $4\sqrt{34} \text{ см}$; б) 960 см^2 .

3. а) 24 см; б) $30(5 + 7\sqrt{3}) \text{ см}^2$.

Контрольная работа № 6

Вариант 1

1. 10 см; 2. 50 см^2 ; 3. а) 90° ; б) $\arctg \sqrt{6}$.

Вариант 2

1. а) 20 см; б) $4\sqrt{34}$ см; 2. $100\sqrt{2}$ дм^2 . 3. а) 90° ; б) 45° .

Вариант 3

1. 13 м; 2. $36\sqrt{6}$ см^2 ; 3. 5 дм; 10 дм; $5\sqrt{5}$ дм.

Вариант 4

1. 8 дм; 2. $12,5 \text{ дм}^2$; 3. а) 9 м; б) $18\sqrt{3}$ м^2 .

II. ЗАДАНИЯ К ТЕМАТИЧЕСКИМ ЗАЧЕТАМ

1. Вопросы (формулировки определений)

1. Аксиомы стереометрии.
2. Способы задания плоскости.
3. Параллельность прямых в пространстве.
4. Свойства параллельного проектирования.
5. Скрещивающиеся прямые. Угол между скрещивающимися прямыми.
6. Скрещивающиеся прямые. Расстояние между скрещивающимися прямыми.
7. Параллельность прямой и плоскости.
8. Угол между прямой и плоскостью.
9. Параллельность плоскостей.
10. Свойства параллельных плоскостей.
11. Угол между плоскостями.
12. Площадь ортогональной проекции многоугольника.
13. Перпендикуляр и наклонная к плоскости.
14. Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.
15. Перпендикулярность прямых в пространстве.
16. Перпендикулярность прямой и плоскости.
17. Перпендикулярность плоскостей.
18. Расстояние между двумя точками, заданными координатами этих точек.
19. Координаты середины отрезка.
20. Параллельный перенос в пространстве и его свойства.
21. Подобие пространственных фигур и его свойства.
22. Векторы в пространстве. Действия над векторами в пространстве.

2. Теоремы (формулировки и краткие доказательства)

1. Существование и единственность плоскости, проходящей через данную прямую и данную точку.

2. Теорема о прямой, имеющей с плоскостью две общие точки.

3. Существование и единственность плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой.

4. Существование и единственность прямой, параллельной данной прямой и проходящей через данную точку.

5. Признак параллельности двух прямых в пространстве.

6. Признак параллельности прямой и плоскости.

7. Признак параллельности плоскостей.

8. Существование плоскости, параллельной данной плоскости.

9. Теорема о прямых пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.

10. Теорема об отрезках параллельных прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями.

11. Признак перпендикулярности двух прямых в пространстве.

12. Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

13. Теорема о плоскости, перпендикулярной одной из двух параллельных прямых.

14. Теорема о двух прямых, перпендикулярных плоскости.

15. Теорема о трех перпендикулярах.

16. Признак перпендикулярности плоскостей.

3. Задачи

1. Аксиомы стереометрии

1. В пересекающихся плоскостях α и β взяты соответственно точки A и B , которые не лежат на линии их пересечения — прямой c . Точка M лежит на прямой c .

1) Постройте линию пересечения плоскостей:

а) α и MAV ;

б) β и MAV .

2) Найдите общую точку плоскостей α , β и ABM .

2. Через точку M , которая не лежит в плоскости α , проведены прямые a , b и c . Они пересекают плоскость α в точках, которые не лежат на одной прямой. Лежат ли прямые a , b и c в одной плоскости? (Ответ поясните).

3. Через сторону AB ромба $ABCD$ проведена плоскость α . Точки E , F — середины сторон AD и DC .

1) Постройте точку M — точку пересечения прямой EF и плоскости α .

2) Вычислите расстояние от этой точки до точек A и B , если $BC = 12$ см.

4. Через боковую сторону AB трапеции $ABCD$ проведена плоскость α .

1) Постройте точку M — точку пересечения прямой DC и плоскости α .

2) Вычислите расстояние от этой точки до точек A и D , если $AD = 2$ см, $BC = 6$ см, $AB = 4$ см, $DC = 5$ см.

5. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка K лежит на ребре BB_1 . Постройте:

- 1) точку пересечения прямой A_1K с плоскостью ABC ;
- 2) точку пересечения прямой C_1K с плоскостью ABC ;
- 3) прямую, по которой пересекаются плоскости ABC и A_1KC_1 .

6. Прямая c является линией пересечения плоскостей α и β . В плоскости α проведена прямая a , пересекающая c . В плоскости β взята точка B , не лежащая на прямой c .

1) Постройте линию пересечения плоскости β с плоскостью, в которой лежат прямая a и точка B .

2) Найдите общую точку плоскостей α , β и плоскости, в которой лежат прямая a и точка B .

7. Вершины A , B и точка пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ лежат в плоскости α . Лежат ли в этой плоскости вершины C и D ?

8. Верно ли, что любая прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей параллелограмма, имеет хотя бы одну общую точку с его стороной?

2. Параллельность прямых в пространстве

9. Точка B отрезка AB лежит в плоскости α .

Через точку A проведена прямая, пересекающая плоскость α в точке A_1 . Через середину отрезка AB (точку C) проведена прямая c , параллельная AA_1 .

1) Постройте точку пересечения прямой c и плоскости α (C_1).

2) Вычислите CC_1 , если $AA_1 = 22$ см.

10. Отрезок AB не имеет общих точек с плоскостью α . Через его концы проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках A_1 и B_1 . Точка K — середина отрезка AB

1) Постройте точку пересечения плоскости α и прямой, которая проходит через точку K и параллельна прямой AA_1 .

2) Вычислите длину отрезка KK_1 , если $AA_1 = 10$ см, $BB_1 = 6$ см.

11. Точка A луча AB лежит в плоскости α .

Через точки B и C этого луча (C лежит между A и B) проведены параллельные прямые, которые пересекают плоскость α в точках C_1 и B_1

1) Лежат ли точки A , B_1 и C_1 на одной прямой?

2) Вычислите AB_1 и AC_1 , если $AC = 6$ см, $CB = 4$ см, $C_1B_1 = 10$ см.

12. Концы отрезка AB лежат по разные стороны относительно плоскости α . Через точки A , B и середину отрезка AB (точку M) проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1 , B_1 и M_1 . Вычислите MM_1 , если $AA_1 = 6$ см, $BB_1 = 4$ см.

13. Точка K расположена вне плоскости треугольника ABC , E и F — середины отрезков KA и KC .

1) Докажите, что отрезок EF равен и параллелен средней линии треугольника ABC (MP). M и P — середины сторон BA и BC .

2) Как расположены прямые EM и FP ?

14. Прямые a и b параллельны. Докажите, что пересекающие их прямые лежат в одной плоскости.

15. Точка K не лежит в плоскости трапеции $ABCD$. Через середины отрезков KA и KB проведена прямая EF ($AB \parallel CD$).

1) Докажите, что прямые EF и DC параллельны.

2) Определите вид четырехугольника $DCFE$, если $AB : DC = 2 : 1$.

16. Квадрат $ABCD$ и равнобедренный треугольник KBC ($KB = BC$) лежат в разных плоскостях. M и P — середины отрезков BK и CK .

1) Определите вид четырехугольника $MPDA$.

2) Вычислите его площадь, если $AB = 12$ см, $MA = PD = 5$ см.

3. Параллельность прямой и плоскости

17. Отрезок KM , равный 10 см, параллелен плоскости α . Через его концы проведены параллельные прямые, пересекающие α в точках K_1 и M_1 .

- 1) Как расположены прямые KM и K_1M_1 ?
- 2) Вычислите расстояние между точками K_1 и M_1 .
- 3) Вычислите площадь четырехугольника KMM_1K_1 , если $KK_1 = 8$ см, $\angle KMM_1 = 30^\circ$.

18. Отрезок AB параллелен плоскости α . Через его концы проведены параллельные прямые. Прямая, проходящая через точку B , пересекает плоскость в точке B_1 .

- 1) Постройте точку пересечения второй прямой с плоскостью α (точку A_1).
- 2) Вычислите периметр четырехугольника ABB_1A_1 , если $AB : BB_1 = 5 : 2$, $AB - BB_1 = 9$ см.

19. Через точку K стороны AC треугольника ABC проведена плоскость α , параллельная прямой AB .

- 1) Постройте точку пересечения плоскости α и стороны BC (точку M).
- 2) Вычислите длину отрезка KM , если $KM + AB = 26$ см, $CK : KA = 4 : 5$.

20. В плоскости α , пересекающейся с плоскостью β по прямой c , проведена прямая a , параллельная c . В плоскости β проведена прямая b , пересекающая прямую c .

- 1) Могут ли прямые a и b иметь общие точки?
- 2) Докажите, что a и b — скрещивающиеся прямые.

21. Точки A , B , C и D не лежат в одной плоскости. K и M — середины отрезков BD и CD .

1) Имеют ли общие точки прямая KM и плоскость, в которой лежат точки A , B и C ?

2) Вычислите периметр треугольника AKM , если расстояние между каждой парой данных точек равно 8 см.

22. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$.

1) Постройте отрезок, являющийся пересечением грани $ABB_1 A_1$ и плоскости α , в которой лежат прямая CC_1 и точка K — середина AB .

2) Постройте сечение куба плоскостью α .

3) Вычислите периметр построенного сечения, если ребро куба равно 20 см.

23. Прямая a параллельна плоскости α . Верно ли утверждение, что любая прямая плоскости α параллельна прямой a ?

24. Верно ли утверждение, что две прямые, параллельные одной плоскости, параллельны?

4. Параллельность плоскостей

25. Через точку O , расположенную между параллельными плоскостями α и β , проведены две прямые, которые пересекают плоскости в точках A и A_1 , B и B_1 .

1) Как расположены прямые AB и A_1B_1 ? (Ответ поясните.)

2) Вычислите длину отрезка A_1B_1 , если $AB = 18$ см, $AO : OA_1 = 3 : 5$.

26. Два луча с началом в точке A пересекают одну из параллельных плоскостей в точках A_1, B_1 , а другую — в точках A_2, B_2 .

1) Как расположены прямые A_1B_1 и A_2B_2 ? (Ответ поясните.)

2) Вычислите AB_1 , если $A_1B_1 = 4$ см, $A_2B_2 = 16$ см, $B_1B_2 = 15$ см.

27. Плоскости α и β параллельны. Через точки A и B плоскости α проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость β в точках A_1 и B_1 .

1) Определите вид четырехугольника ABB_1A_1 .

2) Вычислите периметр четырехугольника ABB_1A_1 , если $AB = 10$ см, $AA_1 = 8$ см.

28. Через точки B_1 и B_2 стороны AB равностороннего треугольника ABC проведены плоскости α и β , параллельные прямой BC .

1) На какие фигуры делится этот треугольник плоскостями α и β ?

2) Вычислите периметры этих фигур, если

$AC = 8$ см и $AB_1 = B_1B_2 = B_2B$.

29. Плоскость α параллельна плоскости равностороннего треугольника ABC . Через его вершины проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках A_1, B_1, C_1 . Вычислите периметр и площадь треугольника $A_1B_1C_1$, если $AB = 6$ см.

30. Точки A , B , C и D не лежат в одной плоскости.

K , M , P — середины отрезков AB , AC , AD .

1) Докажите, что плоскости DBC и KMP параллельны.

2) Вычислите периметр треугольника KMP , если

$BD = 12$ см, $BC = 8$ см, $DC = 6$ см.

31. Плоскости α и β параллельны. Верно ли, что любая прямая плоскости α параллельна плоскости β ? (Ответ поясните.)

32. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 24 см.

Точка K — середина ребра BB_1 . Через K проведена плоскость α , параллельная плоскости BC_1A_1 .

1) Постройте отрезок, который лежит в плоскости α и в грани ABB_1A_1 .

2) Постройте сечение куба плоскостью α .

3) Вычислите площадь сечения.

33. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка K — середина ребра AB . Постройте сечение куба плоскостью, которая содержит точку K и параллельна плоскости BB_1D_1 .

34. Верно ли, что две плоскости, параллельные одной прямой, параллельны?

5. Перпендикуляр и наклонные

35. Из точки K проведены к плоскости перпендикуляр KO и наклонные KA и KB . Длины наклонных соответственно равны 13 см и 20 см. Проекция наклонной KA равна 5 см. Вычислите длину проекции наклонной KB .

36. Из точки M проведены к плоскости наклонные MA , MB и перпендикуляр MO .

1) Постройте проекции наклонных.

2) Вычислите длины проекций, если $\angle AMO = 60^\circ$, $\angle BMO = 45^\circ$, $MO = 16$ см.

37. К плоскости квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр DM , равный 12 см. Сторона квадрата равна 5 см. Вычислите длины:

1) проекций наклонных MA , MC , MB ;

2) длины наклонных.

38. В одной из пересекающихся плоскостей (β) расположены точки A и B . Проекцией точки A на вторую плоскость (α) является точка A_1 .

1) Постройте проекцию точки B на плоскость α .

2) Вычислите расстояние от середины отрезка AB до плоскости α , если A и B удалены от нее на 12 см и 8 см.

39. Через середину O гипотенузы прямоугольного треугольника ABC проведен к его плоскости перпендикуляр KO

1) Докажите, что наклонные KA , KB и KC равны.

2) Вычислите длины проекций этих наклонных на плоскость треугольника, если $AC = BC = a$.

40. Из точки M проведены к плоскости α наклонные MA и MB , равные 10 см и 17 см. Вычислите расстояние от точки M до плоскости α , если длины проекций пропорциональны числам 2 и 5

41. Из точки M проведены к плоскости α наклонные MA , MB и перпендикуляр MC , равный a . Угол между каждой наклонной и перпендикуляром равен 45° . Вычислите:

1) площадь треугольника ABC , если проекции наклонных перпендикулярны;

2) угол между наклонными.

42. Через точку пересечения диагоналей ромба $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр MO длиной 12 см. Диагонали ромба равны 18 см и 10 см. Вычислите:

1) длины наклонных MA , MB , MC и MD ;

2) расстояния между основаниями этих наклонных.

43. Отрезок AB , равный 12 см, не имеет общих точек с плоскостью α . Его концы удалены от плоскости на 20 см и 14 см.

1) Лежат ли в одной плоскости отрезок AB и его проекция на плоскость α ?

2) Вычислите периметр и углы четырехугольника, вершинами которого являются точки A , B и их проекции на плоскость α .

44. Вершины A и D ромба $ABCD$ лежат в плоскости α . Расстояние от вершины B до этой плоскости равно 5 см.

1) Определите вид четырехугольника, вершинами которого являются точки B , C и их проекции на плоскость α .

2) Вычислите периметр этого четырехугольника, если угол между стороной AB и ее проекцией равен 30° .

45. К плоскости прямоугольного треугольника ABC проведены перпендикуляр MB и наклонные MA , MC . $MA = 2a$, $MB = a$, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$.

1) Вычислите угол между наклонной MA и ее проекцией на плоскость треугольника ABC .

2) Вычислите длины наклонной MC и ее проекции.

3) Докажите, что треугольник AMC — прямоугольный.

6. Свойства точки, равноудаленной от вершин многоугольника

46. Точка M удалена от каждой вершины квадрата на 10 дм. Вычислите расстояние от точки M до плоскости квадрата, если его сторона равна $6\sqrt{2}$ дм.

47. Точка M одинаково удалена от всех вершин правильного треугольника ABC и удалена от его плоскости на 6 см. Вычислите расстояние от точки M до вершин треугольника, если его сторона равна $8\sqrt{3}$ см.

48. Точка, равноудаленная от всех вершин прямоугольника, находится на расстоянии 8 см от его плоскости. Вычислите расстояние от этой точки до вершин прямоугольника, если его меньшая сторона равна 8 см, а диагональ образует с большей стороной угол в 30° .

49. Точка M удалена от каждой вершины остроугольного треугольника ABC на 17 см. Вычислите расстояние от точки M до плоскости треугольника, если $\angle BAC = 30^\circ$, $BC = 8$ см.

50. Точка P равноудалена от всех вершин треугольника, стороны которого равны 6 см, 6 см и 8 см. Расстояние от точки P до плоскости треугольника равно $2\sqrt{14}$ см. Вычислите расстояние от точки P до вершин треугольника.

51. Расстояние от точки M , равноудаленной от всех вершин правильного шестиугольника $ABCDEF$, до его плоскости равно a . $AB = a$. Вычислите:

- 1) расстояние от точки M до вершин шестиугольника;
- 2) угол, образованный наклонной MB и ее проекцией на плоскость шестиугольника.

Задачи. Точка, равноудаленная от вершин многоугольника

52. Ребро куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равно 16 см. Найдите точку основания $A_1 B_1 C_1 D_1$, равноудаленную от вершин A , B , C и D . Найдите расстояние от этой точки до указанных вершин.

53. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120° , боковая сторона — 10 см. Вне плоскости треугольника дана точка, удаленная от всех его вершин на 26 см. Вычислите расстояние от этой точки до плоскости треугольника.

7. Перпендикулярность прямой и плоскости

54. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) точки F и E середины сторон AB и AC . Через точку E проведен перпендикуляр ME к плоскости этого треугольника. Докажите, что:

- 1) $MF \perp AC$;
- 2) $MC = MA$.

55. Через некоторую точку O высоты AD равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) проведен к его плоскости перпендикуляр OK . Докажите, что прямая BC перпендикулярна прямой DP , где P — произвольная точка отрезка AK .

56. К плоскости правильного шестиугольника $ABCDEF$ проведен перпендикуляр DM . Докажите перпендикулярность прямых:

- 1) AB и MB ;
- 2) AF и MF .

57. Отрезок AM , равный 12 см, перпендикулярен плоскости треугольника ABC . Вычислите расстояние от точки M до прямой BC , если $AB = AC = 20$ см, $BC = 24$ см.

58. К плоскости прямоугольника $ABCD$, площадь которого равна 180 см^2 , проведен перпендикуляр KD . Вычислите расстояния от точки K до сторон прямоугольника, если $KD = 12$ см, $BC = 20$ см.

59. К плоскости прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$) проведен перпендикуляр PB . $PA = 13$ см, $\angle ABC = 30^\circ$, $AC = 5$ см. Вычислите расстояние от точки P до:

- 1) прямой AC ;
- 2) плоскости треугольника ABC .

60. К плоскости квадрата $ABCD$ проведен перпендикуляр BM , равный 4 дм. $AB = 2$ дм. Вычислите расстояния от точки M до сторон и диагоналей квадрата.

61. Катеты прямоугольного треугольника равны 12 см и 16 см. Через середину гипотенузы проведен перпендикуляр к его плоскости, равный 6 см. Вычислите расстояния от концов перпендикуляра до катетов и вершины прямого угла треугольника.

62. Через сторону AB квадрата $ABCD$, равную $2a$, проведена плоскость α . Расстояние от прямой DC до этой плоскости равно a .

1) Постройте проекцию стороны DC данного квадрата на плоскость α ;

2) Найдите расстояние между прямой AB и проекцией прямой DC на плоскость α .

63. Через катет BC , равный a , прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$) проведена плоскость α . Вершина A удалена от нее на расстояние b . Вычислите:

1) длину проекции гипотенузы на плоскость α ;

2) расстояние от проекции точки A на плоскость α до прямой BC .

64. К плоскости треугольника ABC проведен перпендикуляр AD , равный 5 см. $AB = 13$ см, $BC = 14$ см, $AC = 15$ см. Вычислите расстояние от точки D до стороны BC .

65. К плоскости ромба $ABCD$, в котором $\angle A = 45^\circ$, $AB = 8$ см, проведен перпендикуляр MC , равный 7 см. Вычислите расстояния от точки M до сторон ромба.

8. Свойства точки, равноудаленной от сторон многоугольника

66. Точка M одинаково удалена от всех сторон квадрата $ABCD$. Расстояние от точки M до его плоскости равно 16 см, $AB = 24$ см. Вычислите расстояние от точки M до:

- 1) сторон квадрата;
- 2) вершин квадрата.

67. Точка K удалена от каждой стороны правильного треугольника на 30 см, а от его плоскости — на 18 см. Вычислите длину:

- 1) радиуса окружности, вписанной в данный треугольник;
- 2) стороны треугольника.

68. Точка M одинаково удалена от сторон правильного шестиугольника, сторона которого равна 6 см. Расстояние от точки M до плоскости шестиугольника равно $3\sqrt{6}$ см. Вычислите расстояние от точки M до каждой стороны шестиугольника.

69. Точка M удалена от каждой стороны ромба на 20 см. Вычислите расстояние от точки M до плоскости ромба, если его диагонали равны 30 см и 40 см.

70. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 10 см, а основание — 12 см. Точка M удалена от каждой его стороны на 5 см. Вычислите:

- 1) расстояние от точки M до плоскости треугольника;
- 2) площадь круга, вписанного в треугольник.

71. Точка, одинаково удаленная от всех сторон равнобокой трапеции, находится на расстоянии 3 см от ее плоскости. Вычислите расстояние от этой точки до сторон трапеции, если ее периметр равен 48 см, а острый угол 60° .

72. Стороны треугольника равны 7 см, 24 см и 25 см. Точка M удалена от каждой его стороны на 5 см. Вычислите расстояние от точки M до плоскости этого треугольника.

9. Угол между прямой и плоскостью

73. К плоскости α проведены наклонные MA , MB и перпендикуляр MO . Углы между MB , MA и плоскостью α равны соответственно 30° и 45° , $MO = 15$ см. Вычислите длины наклонной MA и проекции наклонной MB .

74. Через середину гипотенузы прямоугольного треугольника ABC проведен к его плоскости перпендикуляр KO , равный 8,5 см. $BC = 8$ см, $AC = 15$ см. Вычислите углы между плоскостью треугольника и наклонными KA , KB , KC .

75. Через вершину тупого угла ромба $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр DK , равный a . $AB = a$, $\angle A = 60^\circ$. Вычислите:

- 1) углы между плоскостью ромба и прямыми AK , BK , CK ;
- 2) угол между прямой AC и плоскостью DKB .

76. К плоскости прямоугольника $ABCD$ проведен перпендикуляр BK , равный a . $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Вычислите угол между прямой KD и плоскостью:

- 1) прямоугольника;
- 2) треугольника BKC .

77. Точка M одинаково удалена от вершин равностороннего треугольника ABC , сторона которого равна a . Расстояние от точки M до плоскости треугольника равно a . Вычислите угол между:

- 1) прямой MA и плоскостью треугольника ABC ;
- 2) прямой ME (E — середина BC) и плоскостью треугольника ABC .

78. Катет BC прямоугольного треугольника ABC лежит в плоскости α . Вершина A удалена от нее на $2\sqrt{2}$ дм. $BC = AC = 4$ дм. Вычислите угол между плоскостью α и прямой:

1) AC ; 2) AB .

79. Через сторону AB прямоугольника $ABCD$ проведена плоскость α . Сторона CD удалена от этой плоскости на 3 см, $CB = 6$ см, $DC = 8$ см. Вычислите:

1) угол между прямой DA и плоскостью α ;

2) синус угла между прямой BD и плоскостью α .

10. Перпендикулярность плоскостей

80. Плоскости α и β перпендикулярны. Плоскость γ , перпендикулярная их линии пересечения, пересекает ее в точке C . На линиях пересечения плоскости γ с α и β расположены точки A и B . $AC = 9$ см, $BC = 9\sqrt{3}$ см. Вычислите:

- 1) длину отрезка AB ;
- 2) углы между прямой AB и плоскостями α и β .

81. Концы отрезка AB , равного 25 см, расположены в перпендикулярных плоскостях и удалены от линии их пересечения соответственно на 15 см и 7 см. Вычислите длины проекций отрезка AB на данные плоскости.

82. Плоскости квадратов $ABCD$ и $ABKM$ перпендикулярны. $MK = a$. Найдите расстояние между точками:

- 1) D и M , K и C ;
- 2) D и K .

83. Точка A удалена от двух перпендикулярных плоскостей на a и $a\sqrt{3}$. Найдите расстояние:

- 1) от точки A до линии пересечения плоскостей;
- 2) между проекциями точки A на данные плоскости.

84. Плоскости прямоугольных треугольников ABC и ABK перпендикулярны. $AB = 6$ см, $AK = 8$ см, $\angle ABK = \angle ABC = 90^\circ$, $\angle BAC = 45^\circ$.

Вычислите расстояние между:

- 1) точками K и C ;
- 2) прямыми BK и AC .

85. Концы отрезка KM лежат в перпендикулярных плоскостях α и β . Углы между прямой KM и плоскостями α и β рав-

ны соответственно 30° и 45° . Точка K удалена от линии пересечения плоскостей на 36 см. Вычислите:

- 1) длину отрезка KM ;
- 2) длины проекций отрезка KM на плоскости α и β ;
- 3) расстояния от середины отрезка KM до плоскостей α и β .

86. Плоскости прямоугольника $ABCD$ и равнобедренного треугольника ABK перпендикулярны. $AK = KB = 10$ см, $AB = 16$ см, $AD = 8$ см. Вычислите расстояние от точки K до:

- 1) середины стороны DC прямоугольника;
- 2) плоскости прямоугольника.

11. Угол между плоскостями

87. Угол между плоскостями α и β равен 60° . Точка A , лежащая в плоскости α , удалена от β на 12 см. Вычислите расстояние:

- 1) от точки A до линии пересечения плоскостей;
- 2) от проекции точки A на плоскость β до линии пересечения плоскостей.

88. Через вершину квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр DK , равный 10 см. Угол между плоскостями ABC и KBC равен 45° . Вычислите площадь:

- 1) квадрата $ABCD$;
- 2) треугольника BCK .

89. Через вершину острого угла прямоугольного треугольника ABC проведен перпендикуляр AD к его плоскости. $AD = 6$ см, $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle ABC = 30^\circ$. Угол между плоскостями BCD и ABC равен 60° . Вычислите:

- 1) угол между плоскостями BAD и CAD ;
- 2) длины наклонных DC и DB .

90. Сторона AC правильного треугольника ABC лежит в плоскости α . Угол между плоскостями треугольника и α равен 60° . $AC = 12$ см.

Вычислите:

- 1) расстояние от точки B до плоскости α ;
- 2) длину проекции высоты BD треугольника на плоскость α .

91. Сторона AB квадрата $ABCD$ лежит в плоскости α . Прямая DC удалена от этой плоскости на 18 см. $BC = 36$ см. Вычислите:

- 1) угол между плоскостью квадрата и плоскостью α ;
- 2) площадь проекции квадрата $ABCD$ на плоскость α .

92. Через центр O квадрата $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикуляр KO . Угол между прямой KC и плоскостью квадрата равен 60° . $AB = 18$ см. Вычислите угол между плоскостями:

- 1) AKC и DKB ;
- 2) ABC и BKC .

93. Плоскости равносторонних треугольников ABC и ABD перпендикулярны. Вычислите угол между:

- 1) прямой DC и плоскостью ABC ;
- 2) плоскостями ADC и BDC .

94. Площадь плоского четырехугольника равна 120 дм². Вычислите площадь ортогональной проекции этого четырехугольника на плоскость, составляющую с плоскостью четырехугольника угол в 30° .

95. В треугольнике ABC длины сторон равны 13 см, 14 см и 15 см. Через сторону AB проведена плоскость α под углом 45° к плоскости треугольника ABC . Вычислите площадь ортогональной проекции этого треугольника на плоскость α .

96. Плоскости двух треугольников ABC и ABC_1 образуют угол в 60° . Отрезок CC_1 перпендикулярен плоскости треугольника ABC_1 , углы A и B которого равны соответственно 30° и 60° , а сторона AC_1 равна 18 см. Вычислите площадь треугольника ABC .

12. Декартовы координаты в пространстве

97. На оси Ox найдите точку, равноудаленную от точек $B(3; -2; 4)$ и $C(0; 5; -1)$.

98. Даны вершины параллелограмма $ABCD$:

$A(-3; -6; -1)$, $B(-1; 2; -3)$, $C(3; 1; 1)$. Вычислите координаты четвертой вершины.

99. Вершины треугольника ABC имеют координаты $A(3; 4; 1)$, $B(0; 4; 2)$, $C(3; 1; 0)$.

1) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

2) Вычислите координаты основания высоты AD .

100. Известны координаты вершин треугольника ABC : $A(0; 3; 4)$, $B(4; -1; 2)$, $C(1; 1; 2)$.

1) Вычислите длину его медианы CD .

2) Является ли треугольник ABC прямоугольным?

101. Докажите, что параллелограмм $ABCD$ является прямоугольником, если $A(4; 2; 3)$, $B(2; 3; 0)$, $C(-1; 3; 2)$. Вычислите его площадь.

102. Вершины треугольника имеют координаты: $A(3; 1; 2)$, $B(1; 2; -1)$, $C(-2; 2; 1)$. Докажите, что этот треугольник прямоугольный. Вычислите его площадь.

103. Диагонали параллелограмма $ABCD$ пересекаются в начале координат. $A(-2; 2; -1)$, $B(3; 4; 2)$.

1) Вычислите координаты других вершин параллелограмма.

2) Является ли этот параллелограмм прямоугольником?

104. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является равнобокой трапецией, если $A(-1; 2; -3)$, $B(-5; 2; 1)$, $C(-9; 6; 1)$, $D(-9; 10; -3)$. Вычислите ее площадь.

ОТВЕТЫ

1. Аксиомы стереометрии

2. Нет.

3. $MA = 6$ см, $MB = 18$ см.

4. $MA = 2$ см, $MD = 2,5$ см.

7. Да.

8. Нет.

2. Параллельность прямых в пространстве

9. $CC_1 = 11$ см.

10. $KK_1 = 8$ см.

11. 1) Да; 2) $AC_1 = 15$ см, $AB_1 = 25$ см.

12. $MM_1 = 1$ см.

15. Параллелограмм.

16. 1) Трапеция; 2) 36 см².

3. Параллельность прямой и плоскости

17. 1) $KM \parallel K_1M_1$;

2) 10 см; 3) 40 см².

18. 2) 42 см.

19. 2) 8 см.

20. Нет.

21. 1) Нет; 2) $8\sqrt{3} + 4$ см.

22. $40 + 20\sqrt{5}$ см.

23. Нет.

24. Нет.

4. Параллельность плоскостей

25. 1) $AB \parallel A_1B_1$; 2) 30 см.

26. 1) $A_1B_1 \parallel A_2B_2$; 2) 5 см.

27. 1) Параллелограмм; 2) 36 см.

28. 1) Треугольник и трапеции;

2) 8 см; $13\frac{1}{3}$ см; $18\frac{2}{3}$ см.

29. 18 см; $9\sqrt{3}$ см².

30. 2) 13 см.

31. Да.

32. 3) $72\sqrt{3}$ см².

34. Нет.

5. Перпендикуляр и наклонные

35. 16 см.

36. $16\sqrt{3}$ см; 16 см.

37. 1) 5 см; 5 см; $5\sqrt{2}$ см;

2) 13 см; 13 см; $\sqrt{194}$ см.

38. 10 см.

39. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

40. 8 см.

41. 1) $\frac{1}{2}a^2$; 2) 60° .

42. 1) 15 см; 15 см; 13 см; 13 см;

2) 18 см; 10 см; $\sqrt{106}$ см.

43. 1) Да; 2) $46 + 6\sqrt{3}$ см; 120° ; 60° ; 90° ; 90°

44. 1) Прямоугольник; 2) 30 см.

45. 1) 30° ; 2) $MC = \frac{a\sqrt{10}}{2}$; $BC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

6. Свойства точки, равноудаленной от вершин многоугольника

46. 8 дм

47. 10 см.

48. $8\sqrt{2}$ см.

49. 15 см.

50. $3,8\sqrt{5}$ см.

51. 1) $a\sqrt{2}$; 2) 45° .

52. $8\sqrt{6}$ см.

53. 24 см.

7. Перпендикулярность прямой и плоскости

57. 20 см.

58. 15 см; $4\sqrt{34}$ см.

59. 1) 12 см; 2) $\sqrt{69}$ см.

60. $2\sqrt{5}$ дм; $2\sqrt{5}$ дм; 4 дм; 4 дм; 4 дм; $3\sqrt{2}$ дм.

61. 8 см; 6 см; 10 см; 10 см; $6\sqrt{2}$ см; $\sqrt{61}$ см.

62. $a\sqrt{3}$.

63. 1) $\sqrt{a^2 - b^2}$; 2) $\sqrt{2a^2 - b^2}$.

64. 13 см.

65. 9 см.

8. Свойства точки, равноудаленной от сторон многоугольника

66. 1) 20 см; 2) $4\sqrt{34}$ см.

67. 1) 24 см; 2) $48\sqrt{3}$ см.

68. 9 см.

69. 16 см.

70. 1) 4 см; 2) 9π см².

71. 6 см.

72. 4 см.

9. Угол между прямой и плоскостью

73. $15\sqrt{2}$ см; $15\sqrt{3}$ см.

74. 45° .

75. 1) 45° ; 45° ; 45° ; 2) 90° .

76. 1) 30° ; 2) 30° .

77. 1) 60° ; 2) $\text{arctg}(2\sqrt{3})$.

78. 1) 45° ; 2) 30° .

79. 1) 30° ; 2) 0,3.

10. Перпендикулярность плоскостей

80. 1) 18 см; 2) 60° ; 30° .

81. 20 см; 24 см.

82. 1) $a\sqrt{2}$; $a\sqrt{2}$; 2) $a\sqrt{3}$.

83. 1) $2a$; 2) $2a$.

84. 1) 8 см; 2) $3\sqrt{2}$ см.

85. 1) 72 см; 2) $36\sqrt{2}$ см; $36\sqrt{3}$ см; 3) 18 см; $18\sqrt{2}$ см.

86. 1) 10 см; 2) 6 см.

11. Угол между плоскостями

87. 1) $8\sqrt{3}$ см; 2) $4\sqrt{3}$ см.

88. 1) 100 см^2 ; 2) $50\sqrt{2} \text{ см}^2$.

89. 1) 60° ; 2) $4\sqrt{3}$ см; $2\sqrt{21}$ см.

90. 1) 9 см; 2) $3\sqrt{3}$ см.

91. 1) 30° ; 2) $648\sqrt{3} \text{ см}^2$.

92. 1) 90° ; 2) $\text{arctg } \sqrt{6}$.

93. 1) 45° ; 2) $\text{arctg } 2\sqrt{6}$.

94. $60\sqrt{3} \text{ дм}^2$.

95. $42\sqrt{2} \text{ см}^2$.

96. $108\sqrt{3} \text{ см}^2$.

12. Декартовы координаты в пространстве

97. (0,5; 0; 0).

98. (1; -7; 3).

99. (1,5; 2,5; 1).

100. 1) $\sqrt{5}$; 2) Нет.

101. $\sqrt{182}$.

102. $\frac{1}{2}\sqrt{182}$.

103. 1) (2; -2; 1); (-3; -4; -2); 2) Нет.

104. $24\sqrt{3}$.

Учебно-методическое издание

**Дудницын Юрий Павлович
Кронгауз Валерий Лазаревич**

Контрольные работы по геометрии

К учебнику Л.С. Атанасяна,
В.Ф. Бутузова, С.Б. Кадомцева и др.
«Геометрия, 10—11»

10 класс

Издательство «**ЭКЗАМЕН**»

Гигиенический сертификат
№ 77.99.60.953.Д.013269.11.07 от 13.11.2007 г.

Редактор *И.М. Бокова*
Корректор *Г.М. Морозова*
Дизайн обложки *И.Р. Захаркина*
Компьютерная верстка *Н.Н. Балахонцева*

105066, Москва, ул. Нижняя Красносельская, д. 35, стр. 1.
www.examen.biz

E-mail: по общим вопросам: info@examen.biz;
по вопросам реализации: sale@examen.biz
тел./факс 641-00-30 (многоканальный)

Общероссийский классификатор продукции
ОК 005-93, том 2; 953005 — книги, брошюры, литература учебная

Текст отпечатан с диапозитивов
в ОАО «Владимирская книжная типография»
600000, г. Владимир, Октябрьский проспект, д. 7
Качество печати соответствует
качеству предоставленных диапозитивов

По вопросам реализации обращаться по тел.:
641-00-30 (многоканальный).