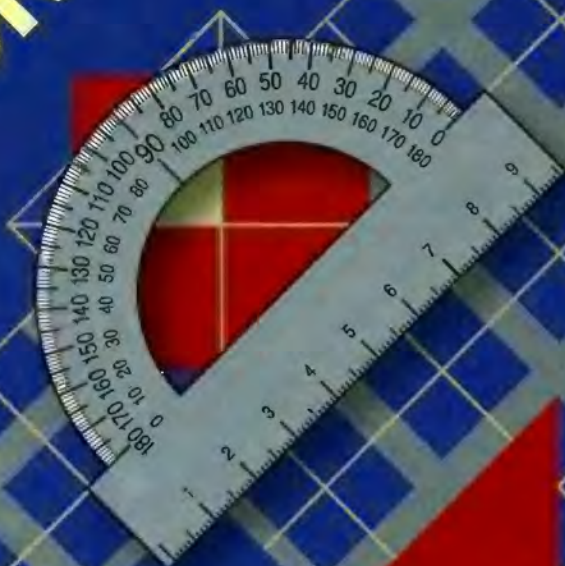


ГЕОМЕТРИЯ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ



8



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

СООТВЕТСТВИЕ МЕЖДУ ПУНКТАМИ УЧЕБНИКА И ЗАДАЧАМИ ТЕТРАДИ

Номера пунктов учебника	Тема	Номера задач тетради
39, 40 41	Многоугольник. Выпуклый многоугольник Четырехугольник	1—5 6, 7
42 43 44	Параллелограмм Признаки параллелограмма Трапеция Задачи на построение	8—14 15 16—18 19, 20
45 46 47	Прямоугольник Ромб и квадрат Осевая и центральная симметрии	21—23 24 25, 26
48 49, 50	Понятие площади многоугольника Площадь квадрата. Площадь прямоугольника	27 28—32
51 52 53 54 55	Площадь параллелограмма Площадь треугольника Площадь трапеции Теорема Пифагора Теорема, обратная теореме Пифагора	33—35 36—41 42—44 45—48 49, 50
56, 57 58	Пропорциональные отрезки. Определение подобных треугольников Отношение площадей подобных треугольников	51—53 54
59 60 61	Первый признак подобия треугольников Второй признак подобия треугольников Третий признак подобия треугольников	55—58 59 60
62 63 64	Средняя линия треугольника Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике Практические приложения подобия треугольников	61—65 66—68 69, 70
66 67	Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника Значения синуса, косинуса и тангенса для углов 30° , 45° и 60°	71—73 74—77
68 69	Взаимное расположение прямой и окружности Касательная к окружности	78, 79 80—84
70 71	Градусная мера дуги окружности Теорема о вписанном угле	85, 86 87—94
72 73	Свойства биссектрисы угла и серединного перпендикуляра к отрезку Теорема о пересечении высот треугольника	95—102 103
74 75	Вписанная окружность Описанная окружность	104—108 109—111
76, 77 78	Понятие вектора. Равенство векторов Откладывание вектора от данной точки	112 113, 114
79 80, 81 82	Сумма двух векторов Законы сложения векторов. Правило параллелограмма. Сумма нескольких векторов Вычитание векторов	115, 116 117—121 122—128
83 84 85	Произведение вектора на число Применение векторов к решению задач Средняя линия трапеции	129—133 134 135—137

ГЕОМЕТРИЯ



РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

8 КЛАСС

Пособие
для учащихся
общеобразовательных
учреждений

12-е издание

Москва
«Просвещение»
2010

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Г36



А в т о р ы:

Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков, И. И. Юдина

Рабочая тетрадь является дополнением к учебнику «Геометрия, 7—9» авторов Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова и др. и предназначена для организации решения задач учащимися на уроке после их ознакомления с новым учебным материалом. На этом этапе учащиеся делают первые шаги по осознанию нового материала, освоению основных действий с изучаемым материалом. Поэтому в тетрадь включены только базовые задачи, обеспечивающие необходимую репродуктивную деятельность в форме внешней речи. Наличие текстовых заготовок облегчает ученику выполнение действий в развернутой письменной форме, а учителю позволяет осуществлять во время урока оперативный контроль и коррекцию деятельности учащихся. Использование данной тетради для организации других видов деятельности (самостоятельных работ, повторения, контроля и т. д.) малоэффективно.

Учебное издание
Атанасян Левон Сергеевич
Бутузов Валентин Федорович
Глазков Юрий Александрович
Юдина Ирина Игоревна

ГЕОМЕТРИЯ

Рабочая тетрадь
8 класс

Пособие для учащихся
общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*. Редактор *Л. В. Кузнецова*. Младший редактор *Н. В. Ноговицина*. Художники *В. А. Андрианов, В. В. Костин, О. П. Богомолова*. Художественный редактор *О. П. Богомолова*. Компьютерная верстка *Е. А. Стрижевской, О. С. Ивановой*. Технический редактор *Е. Н. Зелянина*. Корректор *Н. Д. Цухай*.

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 20.04.10. Формат 70×100¹/₁₆. Бумага писчая. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 3,27. Доп. тираж 50 000 экз. Заказ № 30039.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Саратовский полиграфкомбинат».
410004, г. Саратов, ул. Чернышевского, 59. www.sarpk.ru

ISBN 978-5-09-022773-5

© Издательство «Просвещение», 1999
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2006
Все права защищены

§ 1

Многоугольники

1

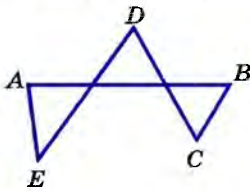
На рисунках *a* — *ж* изображены фигуры, составленные из отрезков AB , BC , CD , DE , EA . Укажите, какие из них являются:

а) многоугольниками; б) выпуклыми многоугольниками.

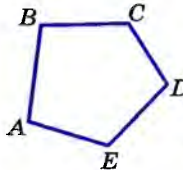
О т в е т.

а) Фигуры, изображенные на рисунках _____

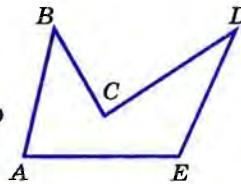
б) Многоугольники, изображенные на рисунках _____



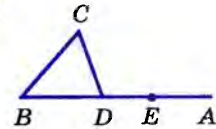
а)



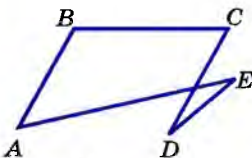
б)



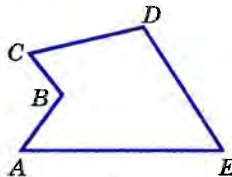
в)



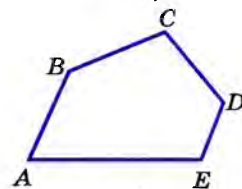
г)



д)



е)

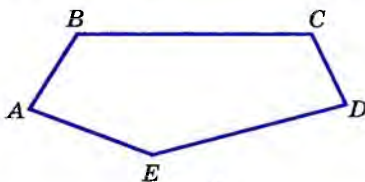


ж)

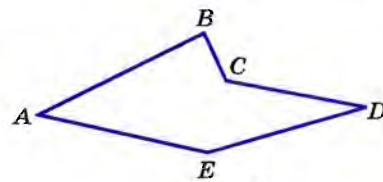
2

Проведите все диагонали в многоугольниках, изображенных на рисунках *a*, *б*, и выпишите их.

О т в е т. а) _____ ; б) _____



а)



б)

3

Начертите выпуклый семиугольник и из какой-нибудь его вершины проведите все возможные диагонали.

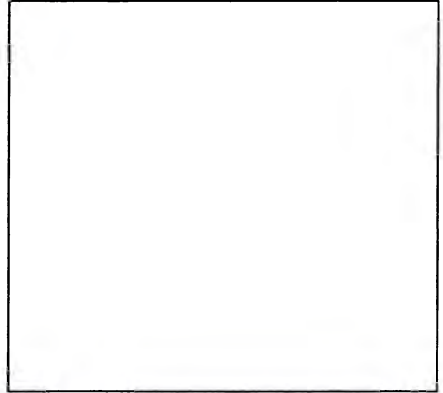
а) Сколько при этом образовалось треугольников?

б) Найдите сумму углов семиугольника.

О т в е т .

а) _____

б) _____°.



4

Используя формулу для вычисления суммы углов выпуклого многоугольника $S_n = 180^\circ(n - 2)$, найдите сумму углов выпуклого:

а) одиннадцатиугольника: $S_{11} = 180^\circ \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

б) двадцатидвухугольника: $S_{22} = 180^\circ \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

О т в е т .

а) _____°;

б) _____°.

5

Найдите число сторон выпуклого многоугольника, каждый угол которого равен: а) 135° ; б) 150° .

Р е ш е н и е .

а) Сумма всех углов выпуклого n -угольника, каждый угол которого равен 135° , равна $135^\circ \cdot n$; с другой стороны, она равна $(n - 2) \cdot 180^\circ$. Таким образом, $135^\circ \cdot n = (n - 2) \cdot 180^\circ$, или $135^\circ \cdot n = 180^\circ \cdot n - 360^\circ$, откуда $45^\circ \cdot n = 360^\circ$, $n = 8$.

б) _____

О т в е т .

а) $n = 8$;

б) $n = \underline{\hspace{1cm}}$

Найдите сторону BC четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен 22 см, сторона AB на 2 см больше стороны BC и на 2 см меньше каждой из сторон DA и CD .

Решение.

По условию $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 22$ см, $BC = AB -$
 $-$ _____, $CD = DA = AB +$ _____

Итак, 22 см = _____ = _____,
откуда $AB =$ _____, а $BC =$ _____

Ответ. $BC =$ _____

Найдите углы B , C и D выпуклого четырехугольника $ABCD$, если $\angle A = \angle B$, $\angle C = \angle D$ и $\angle A = 35^\circ$.

Решение.

Так как по условию $\angle A = \angle B$ и $\angle A = 35^\circ$, то $\angle A + \angle B = 35^\circ \times$
 $\times 2 = 70^\circ$. Сумма углов выпуклого четырехугольника равна _____ $^\circ$,
поэтому $\angle C + \angle D =$ _____ - _____ = _____

По условию $\angle C = \angle D$, значит, каждый из них равен _____

Ответ. $\angle B =$ _____, $\angle C =$ _____, $\angle D =$ _____



2 Параллелограмм и трапеция

В параллелограмме $ABCD$ найдите: а) стороны, если BC на 8 см больше стороны AB , а периметр равен 64 см; б) углы, если $\angle A = 38^\circ$.

Решение.

а) По свойству параллелограмма $AB =$ _____, $BC =$ _____ и $\angle A =$
 $= \angle$ _____, $\angle B = \angle$ _____. По условию $P_{ABCD} = 64$ см, следовательно,
 $2(AB + BC) =$ _____, откуда $AB + BC =$ _____, но BC на
_____ больше AB , поэтому $AB +$ _____ = 32 см, отку-
да $AB =$ _____, $BC =$ _____ + 8 см = _____

б) По условию $\angle A = 38^\circ$, а так как $\angle A + \angle B =$ _____ $^\circ$, то $\angle B =$
 $=$ _____ $^\circ - 38^\circ =$ _____ $^\circ$.

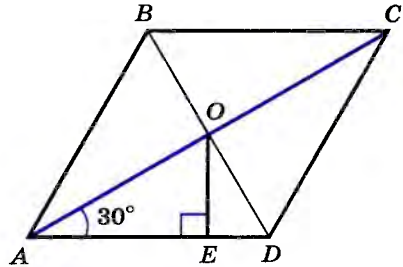
Ответ. а) $AB =$ _____ = _____ см, $BC =$ _____ = _____ см;

б) $\angle C =$ _____ $^\circ$, $\angle B = \angle$ _____ = _____ $^\circ$.

В параллелограмме $ABCD$ диагональ AC , равная 24 см, образует со стороной AD угол в 30° , O — точка пересечения диагоналей AC и BD , $OE \perp AD$. Найдите длину отрезка OE .

Решение.

Диагонали параллелограмма точкой пересечения _____, поэтому $AO = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ см. Треугольник AOE — прямоугольный с гипотенузой _____ и острым углом A , равным _____ $^\circ$. Поэтому катет OE , лежащий против угла в _____ $^\circ$, равен _____, т. е. $OE = \underline{\hspace{1cm}}$ см = _____ см.



Ответ. _____ см.

Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке P , причем $BP = PC$. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 54 см.

Решение.

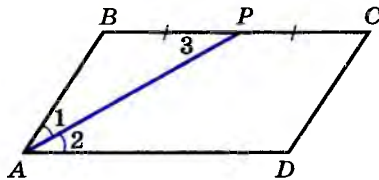
1) $\angle 1 = \angle 2$, так как луч AP — _____, $\angle 2 = \angle 3$, так как эти углы _____ при пересечении параллельных прямых _____ секущей _____. Следовательно, $\angle 1 = \angle 3$.

2) Треугольник ABP — _____, так как его углы 1 и 3 равны, поэтому $AB = \underline{\hspace{1cm}}$

3) По условию $BP = PC$, следовательно, $BC = \underline{\hspace{1cm}} BP = \underline{\hspace{1cm}} AB$.

Итак, $P_{ABCD} = 2(AB + \underline{\hspace{1cm}}) = \underline{\hspace{1cm}} AB$.

Так как периметр параллелограмма равен 54 см, то _____ $AB = 54$ см, откуда $AB = \underline{\hspace{1cm}}$ см и $BC = \underline{\hspace{1cm}}$ см.

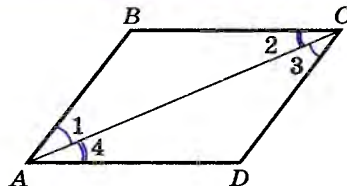


Ответ. $AB = DC = \underline{\hspace{1cm}}$ см,
 $BC = AD = \underline{\hspace{1cm}}$ см.

11

На рисунке в четырехугольнике $ABCD$ $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$.

Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.



Доказательство.

1) Так как $\angle 1 = \angle 3$, а эти углы — _____ при пересечении прямых _____ и _____ секущей _____, то прямые _____ и _____ параллельны.

2) Так как $\angle 2 = \angle 4$, то прямые _____ и _____ также параллельны.

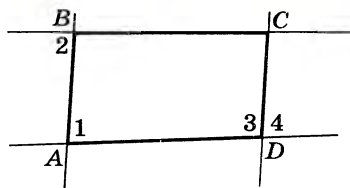
Итак, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, так как его стороны _____

12

Является ли четырехугольник $ABCD$ на рисунке параллелограммом, если:

а) $\angle 1 = 75^\circ$, $\angle 3 = 105^\circ$, $\angle 2 \neq \angle 4$;

б) $\angle 1 = \angle 2 = 70^\circ$, $\angle 3 = 105^\circ$?



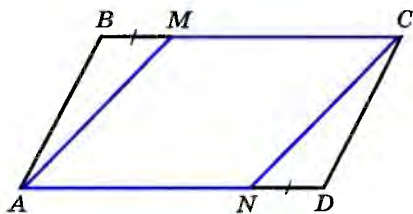
Решение.

а) В четырехугольнике $ABCD$ две стороны AB и CD параллельны, так как $\angle 1 + \angle 3 = 75^\circ + 105^\circ = 180^\circ$, а эти углы — односторонние при пересечении прямых AB и DC секущей AD . Поскольку $AB \parallel DC$, то $\angle 1 = \angle 4$ (как соответственные углы). Две другие стороны AD и BC четырехугольника $ABCD$ не параллельны, так как накрест лежащие углы 1 и 2 не равны ($\angle 1 = \angle 4 \neq \angle 2$). Следовательно, четырехугольник $ABCD$ не является параллелограммом.

б) _____

О т в е т. а) Нет; б) _____

На рисунке в параллелограмме $ABCD$ на сторонах BC и AD отмечены точки M и N так, что $BM = DN$. Докажите, что четырехугольник $AMCN$ — параллелограмм.

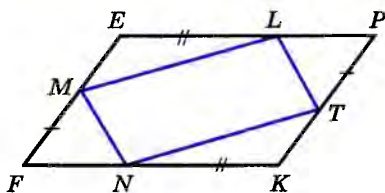


Доказательство.

Так как по условию $ABCD$ — параллелограмм, то его противоположные стороны BC и AD _____ и _____, т. е. _____ \parallel _____, _____ = _____. Так как $MC =$ _____ - _____, $AN =$ _____ - _____, и так как $BM = DN$, то $MC =$ _____

Таким образом, в четырехугольнике $AMCN$ две противоположные стороны _____ и _____ (_____ \parallel _____, _____ = _____), следовательно, $AMNC$ — _____

На сторонах параллелограмма $EFPK$ отмечены точки M, N, T, L так, как показано на рисунке, причем $FM = PT$, $EL = KN$. Докажите, что четырехугольник $MLTN$ — параллелограмм.



Доказательство.

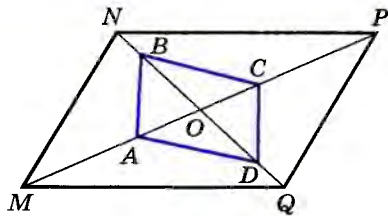
1) Так как $EFPK$ — параллелограмм, то по свойствам параллелограмма $\angle F = \angle$ _____, $\angle E = \angle$ _____ и $EF =$ _____, $EP =$ _____. По условию $FM = PT$, $EL = KN$ и $EM = EF -$ _____, $KT = PK -$ _____, поэтому $EM =$ _____, $PL =$ _____

2) $\triangle MEL = \triangle$ _____ по _____. Из равенства этих треугольников следует равенство сторон ML и _____

3) Аналогично $\triangle MFN = \triangle$ _____, откуда $MN =$ _____

Итак, в четырехугольнике $MLTN$ противоположные стороны _____ и _____, _____ и _____ попарно _____, следовательно, $MLTN$ — параллелограмм.

На рисунке диагонали параллелограмма $MNPQ$ пересекаются в точке O . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является параллелограммом, если $OA = \frac{1}{3}OM$, $OB = \frac{2}{3}ON$, $OC = \frac{1}{3}OP$, $OD = \frac{2}{3}OQ$.



Доказательство.

По свойству параллелограмма диагонали MP и NQ точкой пересечения O _____, т. е. _____ = _____ и _____ = _____, поэтому $OA = \frac{1}{3}OM$, аналогично $OB = \frac{2}{3}ON$

Итак, в четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD точкой пересечения O _____, поэтому $ABCD$ —

Найдите углы M и P трапеции $MNPQ$ с основаниями MQ и NP , если $\angle N = 109^\circ$, а $\angle Q = 37^\circ$.

Решение.

Углы M и N , P и Q — _____ при пересечении параллельных прямых MQ и NP секущими _____ и _____, поэтому $\angle M + \angle N = \text{_____}^\circ$, $\angle P + \angle Q = \text{_____}^\circ$. Так как по условию $\angle N = 109^\circ$, $\angle Q = 37^\circ$, то $\angle M = \text{_____}^\circ - \angle N = \text{_____}^\circ$, $\angle P = \text{_____}^\circ - \angle Q = \text{_____}^\circ$.

Ответ. $\angle M = \text{_____}^\circ$, $\angle P = \text{_____}^\circ$.

Один из углов равнобедренной трапеции равен 115° . Найдите остальные углы трапеции.

Решение.

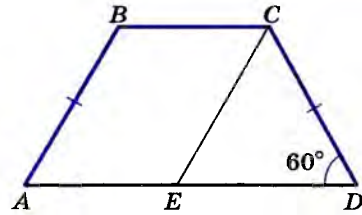
Пусть в равнобедренной трапеции $ABCD$, где AD и BC — основания, $\angle B = 115^\circ$. Так как углы при каждом основании равнобедренной трапеции _____, то $\angle C = \angle \text{_____} = \text{_____}^\circ$, а так как сумма углов, прилежащих к боковой стороне трапеции, равна _____° , то $\angle A = \angle D = \text{_____}^\circ - \angle B = \text{_____}^\circ - 115^\circ = \text{_____}^\circ$.

Ответ. $\angle A = \angle D = \text{_____}^\circ$, $\angle C = \text{_____}^\circ$.

Найдите основание AD равнобедренной трапеции $ABCD$, если $BC = 10$ см, $AB = 12$ см, $\angle D = 60^\circ$.

Решение.

В трапеции $ABCD$ основания AD и BC параллельны, а боковые стороны AB и CD равны.



Проведем прямую CE , параллельную стороне AB . Полученный четырехугольник $ABCE$ — _____, так как его стороны попарно _____. Поэтому $AE = ___ = ___ \text{ см}$, $CE = ___ = ___ \text{ см}$, и так как $CD = AB$, то $CE = CD = ___ \text{ см}$.

Треугольник CDE — _____ ($___ = ___$) с углом при основании в 60° , следовательно, этот треугольник — _____ и $ED = ___ = ___ \text{ см}$. Значит, $AD = AE + ___ = 10 \text{ см} + ___ \text{ см} = ___ \text{ см}$.

Ответ. $AD = ___ \text{ см}$.

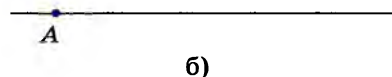
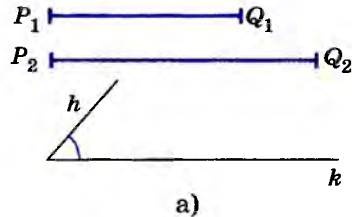
Задачи на построение

Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы его смежные стороны AB и AD были равны соответственно данным отрезкам P_1Q_1 и P_2Q_2 , а угол A был равен данному углу hk (рисунок a).

Решение.

1) На рисунке b построим треугольник ABD по _____ так, что $AB = P_1Q_1$, $AD = P_2Q_2$ и $\angle A = \angle hk$.

2) Построим треугольник BCD по трем сторонам (сторона BD построена, $BC = AD = P_2Q_2$, $CD = AB = P_1Q_1$) так, чтобы точки A и C лежали по разные стороны от прямой BD .



Четырехугольник $ABCD$ — искомый. Действительно, так как по построению $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ и $BC = \underline{\hspace{2cm}}$, то $ABCD$ — $\underline{\hspace{4cm}}$. А так как $AB = P_1Q_1$, $AD = \underline{\hspace{2cm}}$ и $\angle A = \angle \underline{\hspace{2cm}}$ по построению, то параллелограмм $ABCD$ отвечает всем условиям задачи.

20

Разделите данный на рисунке отрезок AB на 5 равных частей.

Решение.

На рисунке проведем луч $AХ$, не лежащий на прямой AB , и на нем от точки A отложим пять $\underline{\hspace{2cm}}$ друг другу отрезков AA_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 . Проведем прямую A_5B и построим прямые, проходящие через точки A_1 , A_2 , A_3 , A_4 и параллельные прямой $\underline{\hspace{2cm}}$. Эти прямые пересекают отрезок AB в точках B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , которые по теореме Фалеса (задача 385) делят отрезок $\underline{\hspace{2cm}}$ на $\underline{\hspace{2cm}}$

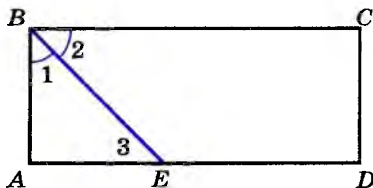


§ 3

Прямоугольник, ромб, квадрат

21

Найдите периметр прямоугольника $ABCD$, изображенного на рисунке, если биссектриса угла B пересекает сторону AD в точке E и делит ее на отрезки $AE = 17$ см и $ED = 21$ см.



Решение.

1) Так как $ABCD$ — прямоугольник, то $AD \parallel \underline{\hspace{2cm}}$ и поэтому $\angle 2 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$. Но $\angle 2 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$ по условию, следовательно, $\angle 1 = \angle \underline{\hspace{2cm}}$ и $\triangle ABE$ — $\underline{\hspace{4cm}}$ с основанием $\underline{\hspace{2cm}}$. Значит, $AB = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ см.

2) $AD = AE + ED = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$; $P_{ABCD} = 2(\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}) = 2(\underline{\hspace{2cm}} \text{ см} + \underline{\hspace{2cm}} \text{ см}) = 2 \cdot \underline{\hspace{2cm}} \text{ см} = \underline{\hspace{2cm}} \text{ см}.$

О т в е т. $P_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$ см.

22

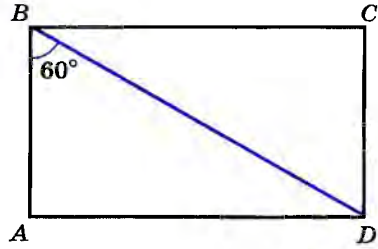
В прямоугольнике $ABCD$ сторона AB равна 12 см, а диагональ BD образует со стороной AB угол в 60° . Найдите диагональ AC .

Решение.

1) В прямоугольном треугольнике ABD $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, поэтому $\angle D = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$, и по свойству катета, лежащего $\underline{\hspace{2cm}}$, имеем: $BD = 2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ см.

2) Так как в прямоугольнике диагонали $\underline{\hspace{1cm}}$, то $AC = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ см.

О т в е т. $AC = \underline{\hspace{1cm}}$ см.



23

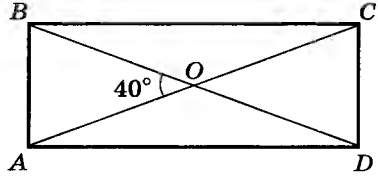
На рисунке в прямоугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O , причем $\angle AOB = 40^\circ$. Найдите $\angle DAO$.

Решение.

1) Так как $ABCD$ — прямоугольник, то его диагонали $\underline{\hspace{1cm}}$ и точкой пересечения $\underline{\hspace{1cm}}$, откуда следует, что $\triangle AOB$ — $\underline{\hspace{1cm}}$ и $\angle BAO = \underline{\hspace{1cm}} \cdot (180^\circ - \underline{\hspace{1cm}}^\circ) = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.

2) $\angle DAO = \angle A - \angle \underline{\hspace{1cm}} = 90^\circ - \underline{\hspace{1cm}}^\circ = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.

О т в е т. $\angle DAO = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.



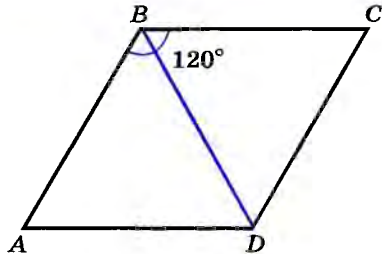
24

Найдите периметр ромба $ABCD$, изображенного на рисунке, если $\angle B = 120^\circ$, а диагональ $BD = 15$ см.

Решение.

1) Так как диагонали ромба делят $\underline{\hspace{1cm}}$, то $\angle ABD = \angle \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$.

2) В треугольнике ABD сторона $AB = \underline{\hspace{1cm}}$ (так как стороны ромба $\underline{\hspace{1cm}}$) и $\angle ABD = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$, следовательно, этот треугольник $\underline{\hspace{1cm}}$ и $AB = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ см.



3) $P_{ABCD} = 4 \cdot \text{--- см} = \text{--- см}$.

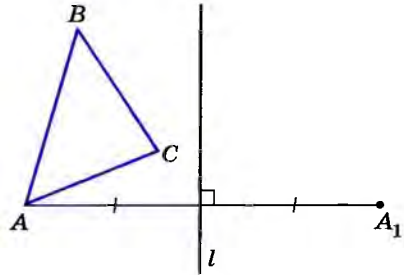
О т в е т . $P_{ABCD} = \text{--- см}$.

25

На рисунке изображены треугольник ABC и прямая l . Постройте треугольник $A_1B_1C_1$, симметричный треугольнику ABC относительно прямой l .

Р е ш е н и е .

Точка A_1 , изображенная на рисунке, симметрична точке A относительно прямой l , так как прямая l — серединный перпендикуляр к отрезку AA_1 . Через точки B и C проведем прямые, _____ к прямой l , и отметим на них точки B_1 и C_1 так, чтобы прямая l была _____ к отрезкам BB_1 и _____. Проведем отрезки A_1B_1 , B_1C_1 , C_1A_1 и получим искомый треугольник $A_1B_1C_1$.



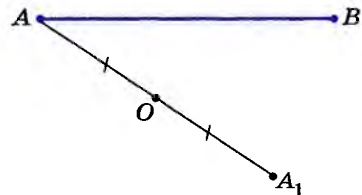
26

На рисунке изображены отрезок AB и точка O . Постройте отрезок A_1B_1 , симметричный отрезку AB относительно точки O .

Р е ш е н и е .

Проведем прямую AO и отметим на ней точку A_1 так, чтобы точка O была _____ отрезка AA_1 (см. рисунок). Точка A_1 _____ точке A относительно точки O .

Аналогичным образом построим точку B_1 , _____ точке B относительно _____. Отрезок A_1B_1 — искомый.



§ 1

Площадь многоугольника

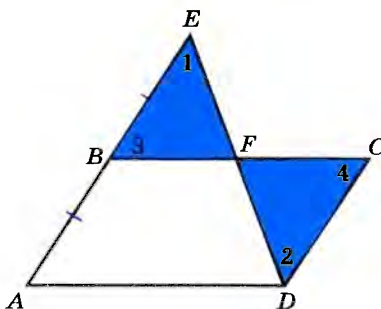
27

На рисунке четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, точка E симметрична точке A относительно точки B . Докажите, что $S_{ABCD} = S_{ADE}$.

Доказательство.

1) $\triangle BEF = \triangle CDF$ по стороне и двум прилежащим к ней углам ($AB =$ $= \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$, $\angle 1 = \underline{\hspace{1cm}}$, $\angle 3 = \underline{\hspace{1cm}}$, так как эти углы $\underline{\hspace{1cm}}$ $\underline{\hspace{1cm}}$ при пересечении параллельных прямых $\underline{\hspace{1cm}}$ и $\underline{\hspace{1cm}}$ секущими $\underline{\hspace{1cm}}$ и $\underline{\hspace{1cm}}$), поэтому $S_{BEF} = \underline{\hspace{1cm}}$

2) $S_{ABCD} = S_{ABFD} + \underline{\hspace{1cm}}$, $S_{ADE} = S_{ABFD} +$ $+ \underline{\hspace{1cm}}$, поэтому $S_{ABCD} = \underline{\hspace{1cm}}$



28

Найдите площадь квадрата, если его сторона равна:

а) 3,2 см;

б) $2\sqrt{3}$ дм.

Решение.

Так как площадь S квадрата со стороной a равна a^2 , то:

а) $S = (\underline{\hspace{1cm}} \text{ см})^2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ см}^2$;

б) $S = (\underline{\hspace{1cm}} \text{ дм})^2 = \underline{\hspace{1cm}} \text{ дм}^2$.

Ответ.

а) $\underline{\hspace{1cm}} \text{ см}^2$;

б) $\underline{\hspace{1cm}} \text{ дм}^2$.

29

Найдите сторону a квадрата, если его площадь S равна: а) 64 см^2 ;
б) $1,69 \text{ дм}^2$.

Решение.

Так как площадь S квадрата со стороной a равна a^2 , то $a = \sqrt{\quad}$

а) $a = \sqrt{\quad} \text{ см}^2 = \quad \text{ см}$; б) $a = \sqrt{\quad} \text{ дм}^2 = \quad \text{ дм}$.

Ответ. а) $\quad \text{ см}$; б) $\quad \text{ дм}$.

30

Смежные стороны прямоугольника равны $4,2 \text{ см}$ и $3,5 \text{ см}$. Найдите площадь S этого прямоугольника.

Решение.

$S = \quad \text{ см} \cdot \quad \text{ см} = \quad \text{ см}^2$.

Ответ. $\quad \text{ см}^2$.

31

Пусть a и b — смежные стороны прямоугольника, а S — его площадь. Найдите сторону b , если $a = 12 \text{ см}$, а $S = 192 \text{ см}^2$.

Решение.

$192 \text{ см}^2 = \quad \text{ см} \cdot b$, откуда $b = \quad \text{ см}^2 : \quad \text{ см} = \quad \text{ см}$.

Ответ. $b = \quad \text{ см}$.

32

Площадь прямоугольника $ABCD$, изображенного на рисунке, равна Q , точка M — середина стороны DC . Найдите площадь треугольника ABE .

Решение.

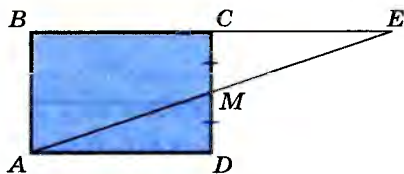
1) $\triangle ADM = \triangle ECM$ по _____

_____ ($DM = \quad$ по условию, $\angle D = \quad = \quad^\circ$, $\angle AMD = \quad$, так как эти углы _____

_____), поэтому $S_{ADM} = \quad$

2) $S_{ABE} = S_{ABCM} + \quad = S_{ABCM} + \quad + \quad = \quad = \quad$

Ответ. $S_{ABE} = \quad$



33

Пусть a — основание, h — высота, S — площадь параллелограмма. Найдите:

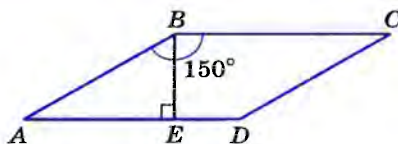
- а) S , если $a = 16$ см, $h = 9$ см;
- б) a , если $h = 4,8$ см, $S = 48$ см²;
- в) h , если $a = 3,5$ дм, $S = 14$ дм².

Решение.

- а) $S = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ см²;
 - б) 48 см² = $a \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ см, откуда $a = \underline{\hspace{1cm}}$ см² : $\underline{\hspace{1cm}}$ см = $\underline{\hspace{1cm}}$ см;
 - в) 14 дм² = $3,5$ дм $\cdot h$, откуда $h = \underline{\hspace{1cm}}$: $\underline{\hspace{1cm}}$ = $\underline{\hspace{1cm}}$ дм.
- О т в е т. а) $S = \underline{\hspace{1cm}}$ см²; б) $a = \underline{\hspace{1cm}}$ см; в) $h = \underline{\hspace{1cm}}$ дм.

34

На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$ с высотой BE .



Найдите S_{ABCD} , если $AB = 13$ см, $AD = 16$ см, $\angle B = 150^\circ$.

Решение.

1) $\angle A = \underline{\hspace{1cm}}^\circ - 150^\circ = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$, так как сумма углов, $\underline{\hspace{1cm}}$, равна $\underline{\hspace{1cm}}^\circ$.

2) $\triangle ABE$ — прямоугольный с острым углом A , равным $\underline{\hspace{1cm}}$, поэтому $BE = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ см.

3) $S_{ABCD} = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ см².

О т в е т. $S_{ABCD} = \underline{\hspace{1cm}}$ см².

35

На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$ с высотой BE . Найдите S_{ABCD} , если $AE = ED$, $BE = 3,2$ см, $\angle A = 45^\circ$.

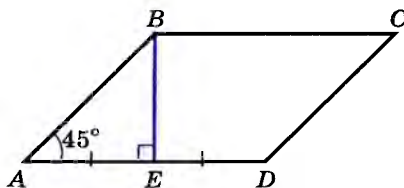
Решение.

1) $\triangle ABE$ — прямоугольный и $\angle A = 45^\circ$, следовательно, $\angle B = \underline{\hspace{1cm}}^\circ$ и $\triangle ABE$ — $\underline{\hspace{1cm}}$. Поэтому $\underline{\hspace{1cm}} = BE = 3,2$ см.

2) Так как по условию $AE = ED$, то
 $AD = 2 \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

3) $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} =$
 $= \underline{\hspace{2cm}}$

О т в е т . $S_{ABCD} = \underline{\hspace{2cm}}$



36

Пусть a — основание, h — высота, S — площадь треугольника.
 Найдите:

- а) S , если $a = 5,4$ см, $h = 6$ см;
 б) h , если $a = 12$ см, $S = 42$ см²;
 в) a , если $h = 2,4$ дм, $S = 4,32$ дм².

Р е ш е н и е .

а) $S = \frac{1}{2} a \cdot h = \frac{1}{2} \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ см²;

б) $h = \underline{\hspace{2cm}} : a = \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ см;

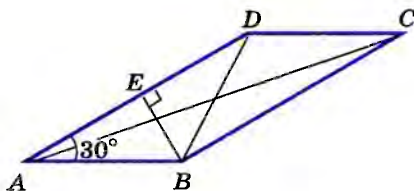
в) $a = 2S : \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} : \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ дм.

О т в е т .

а) $S = \underline{\hspace{2cm}}$ см²; б) $h = \underline{\hspace{2cm}}$ см; в) $a = \underline{\hspace{2cm}}$ дм.

37

На рисунке смежные стороны параллелограмма $ABCD$, равные 6 см и 10 см, образуют угол в 30° . Найдите площадь треугольника ABC .



Р е ш е н и е .

1) Пусть $AB = 6$ см, $AD = 10$ см, $\angle A = 30^\circ$. Так как диагональ параллелограмма делит его на два $\underline{\hspace{2cm}}$, то $\triangle ABC = \triangle \underline{\hspace{2cm}}$, и поэтому $S_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} S_{ABCD}$.

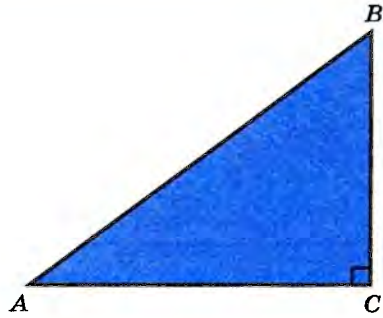
2) $S_{ABCD} = AD \cdot BE$, где BE — $\underline{\hspace{2cm}}$ параллелограмма. Остается найти BE . $\triangle ABE$ — прямоугольный и $\angle A = 30^\circ$, поэтому катет $\underline{\hspace{2cm}}$, лежащий $\underline{\hspace{2cm}}$, равен $\underline{\hspace{2cm}}$, т. е. $BE = \frac{1}{2} \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ см, $S_{ABCD} = 10$ см \cdot $\underline{\hspace{2cm}}$ см = $\underline{\hspace{2cm}}$ см², а $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ см².

О т в е т . $S_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$ см².

Площадь прямоугольного треугольника равна 96 см^2 . Найдите катеты этого треугольника, если известно, что один из них составляет $\frac{3}{4}$ другого.

Решение.

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC , изображенном на рисунке, $BC = \frac{3}{4} AC$.



Так как площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов, то $S_{ABC} = \frac{1}{2} \text{---} \cdot \text{---} = \frac{1}{2} \text{---} \times \frac{3}{4} \text{---} = \text{---}$

По условию $S_{ABC} = 96 \text{ см}^2$, поэтому $96 \text{ см}^2 = \text{---}$, откуда $AC^2 = \text{---} \text{ см}^2$ и $AC = \text{---} \text{ см}$, а $BC = \text{---} \text{ см}$.

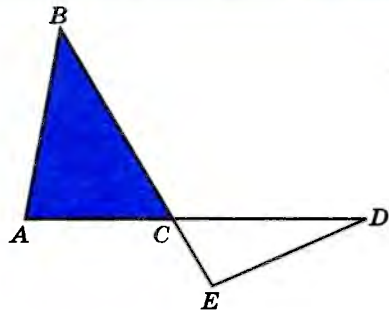
О т в е т. $\text{---} \text{ см}$ и $\text{---} \text{ см}$.

39

На рисунке $AC = 8 \text{ см}$, $BC = 12 \text{ см}$, $CD = 10 \text{ см}$, $CE = 4 \text{ см}$, $S_{ABC} = 48 \text{ см}^2$. Найдите S_{CDE} .

Решение.

Треугольники ABC и CDE имеют по равному углу ($\angle ACB = \angle DCE$, так как эти углы вертикальные), поэтому по теореме об отношении площадей



треугольников, имеющих по равному углу, получаем $S_{CDE} : S_{ABC} = \text{---} \text{ см} \cdot \text{---} \text{ см} : \text{---} \text{ см} \cdot \text{---} \text{ см} = \text{---}$, откуда $S_{CDE} = \text{---} S_{ABC}$. Так как по условию $S_{ABC} = 48 \text{ см}^2$, то $S_{CDE} = \text{---} \times \text{---} \text{ см}^2 = \text{---} \text{ см}^2$.

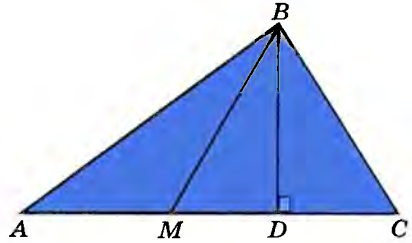
О т в е т. $S_{CDE} = \text{---} \text{ см}^2$.

40

На рисунке точка M делит сторону AC треугольника ABC в отношении $AM : MC = 2 : 3$. Площадь треугольника ABC равна 180 см^2 . Найдите площадь треугольника ABM .

Решение.

Треугольники ABM и ABC имеют общую высоту BD , поэтому их площади относятся как основания _____ и _____. Так как по условию $AM : MC = 2 : 3$, то $AM : AC = _____ : _____$ и $S_{ABM} : S_{ABC} = _____ : _____ ,$ откуда $S_{ABM} = _____ S_{ABC} = _____ \cdot 180 \text{ см}^2 = _____ \text{ см}^2.$



О т в е т. _____ $\text{см}^2.$

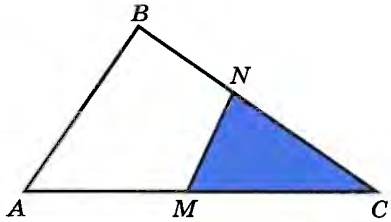
41

На рисунке $CN = \frac{1}{2}AC, CM = \frac{2}{3}BC,$
 $S_{MNC} = 18 \text{ см}^2.$

Найдите $S_{ABC}.$

Решение.

По теореме об отношении площадей треугольников, имеющих по равному углу, $S_{ABC} : S_{MNC} = _____ : _____.$



Так как по условию $CM = \frac{2}{3}BC, CN = \frac{1}{2}AC$ и $S_{MNC} = 18 \text{ см}^2,$ то
 $S_{ABC} = 18 \text{ см}^2 \cdot \frac{\frac{AC}{2} \cdot \frac{BC}{3}}{\frac{2}{3}BC \cdot \frac{1}{2}AC} = 18 \text{ см}^2 \cdot _____ = _____ \text{ см}^2.$

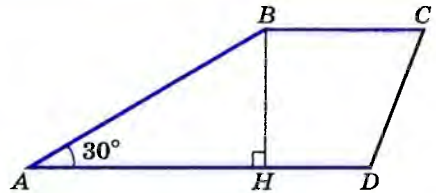
О т в е т. $S_{ABC} = _____ \text{ см}^2.$

42

В трапеции $ABCD,$ изображенной на рисунке, $AB = 12 \text{ см}, AD = 15 \text{ см}, BC = 7 \text{ см}, \angle A = 30^\circ.$ Найдите площадь S трапеции.

Решение.

Проведем высоту BH трапеции $ABCD.$



1) $\triangle ABH$ — прямоугольный, $\angle H = 90^\circ$ по построению, $\angle A = 30^\circ$ по условию, поэтому $BH = \frac{1}{2} _____ = _____ \text{ см}.$

2) $S_{ABCD} = \frac{1}{2} (BC + _____) \cdot _____ = _____ \text{ см}^2 = _____ \text{ см}^2.$

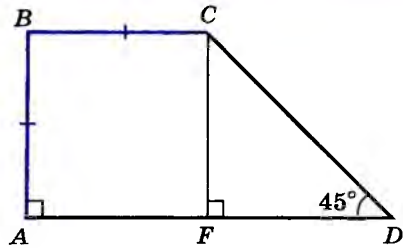
О т в е т. _____ $\text{см}^2.$

В прямоугольной трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AB = BC = 9$ см, $\angle D = 45^\circ$.

Найдите площадь трапеции.

Решение.

Проведем $CF \perp AD$.



1) $ABCF$ — квадрат, так как у прямоугольника $ABCF$ смежные стороны AB и _____, поэтому $AF = CF =$ _____ см.

2) $\triangle CFD$ — прямоугольный, $\angle F = 90^\circ$ по построению, $\angle D = 45^\circ$ по условию, поэтому $\angle DCF =$ _____ $^\circ$ и, следовательно, $\triangle CFD$ — _____ и $DF =$ _____ = _____ см.

3) $AD = AF +$ _____ = _____ см + _____ см = _____ см и $S_{ABCD} =$ _____ = _____ = _____ см².

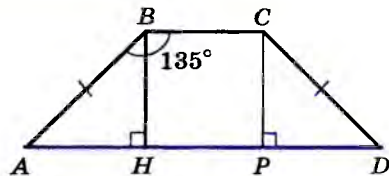
Ответ. _____ см².

В равнобедренной трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, BH — высота, $\angle B = 135^\circ$, $AH = 2,8$ см, $HD = 6,8$ см.

Найдите площадь трапеции.

Решение.

Проведем $CP \perp AD$.



1) Так как трапеция $ABCD$ — равнобедренная, то $DP =$ _____ = _____ см, поэтому $HP = HD -$ _____ = $6,8$ см - _____ см = _____ см; $AD = AH +$ _____ = _____ см + _____ см = _____ см.

2) Четырехугольник $HBCP$ — прямоугольник, поэтому $BC =$ _____ = _____ см.

3) $\angle HBC = 90^\circ$, а так как $\angle ABC = 135^\circ$, то $\angle ABH = \angle ABC -$ _____ = _____ . $\triangle ABH$ — прямоугольный ($\angle H = 90^\circ$, $\angle B = 45^\circ$) и _____, поэтому $BH =$ _____ = _____ см.

4) $S_{ABCD} =$ _____ = _____ см \cdot _____ см = _____ см².

Ответ. _____ см².

45

В прямоугольном треугольнике a и b — катеты.

Найдите: а) b , если $a = 8$, $c = 12$; б) c , если $a = 4\sqrt{2}$, $b = 7$;

в) a , если $b = 3\sqrt{3}$, $c = 5\sqrt{3}$.

Решение. По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$.

а) $b^2 = c^2 - \underline{\quad}$, откуда $b = \sqrt{c^2 - \underline{\quad}} = \sqrt{144 - \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad}} = \underline{\quad}$

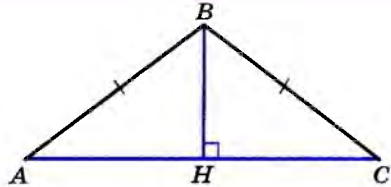
б) $c^2 = \underline{\quad} + \underline{\quad}$, откуда $c = \sqrt{\underline{\quad} + \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad} + \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad}} = \underline{\quad}$

в) $a^2 = c^2 - \underline{\quad}$, откуда $a = \sqrt{c^2 - \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad} - \underline{\quad}} = \underline{\quad}$

О т в е т. а) $\underline{\quad}$; б) $\underline{\quad}$; в) $\underline{\quad}$

46

На рисунке в равнобедренном треугольнике ABC основание $AC = 16$ см, высота $BH = 6$ см. Найдите боковую сторону.



Решение.

1) Так как $\triangle ABC$ — равнобедренный с основанием AC , то $AB = BC$ и высота BH является $\underline{\hspace{2cm}}$, значит, $AH = \frac{1}{2} \underline{\quad} = \underline{\quad}$ см.

2) Из прямоугольного треугольника ABH по теореме Пифагора находим: $AB = \sqrt{\underline{\quad} + \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad} + \underline{\quad}}$ см = $\underline{\quad}$ см.

О т в е т. $\underline{\quad}$ см.

47

По гипотенузе $c = 14$ и катету $b = 7$ прямоугольного треугольника найдите высоту h , проведенную к гипотенузе.

Решение.

1) Пусть a — второй катет прямоугольного треугольника, тогда по теореме Пифагора $a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{14^2 - 7^2} = \sqrt{\underline{\quad}} = \underline{\quad}$

2) Площадь S прямоугольного треугольника равна $\frac{1}{2} a \underline{\quad}$, а с другой стороны, $S = \frac{1}{2} c \underline{\quad}$, поэтому $a \underline{\quad} = c \underline{\quad}$, откуда $h = \underline{\hspace{2cm}}$

О т в е т. $\underline{\hspace{2cm}}$

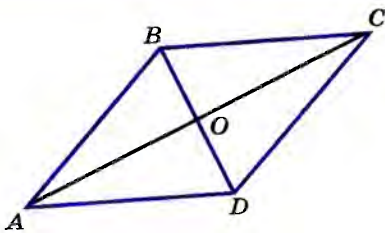
На рисунке диагонали ромба $ABCD$ пересекаются в точке O , $AB = 13$ см, $BD = 10$ см. Найдите AC и S_{ABCD} .

Решение.

1) Так как диагонали ромба взаимно перпендикулярны, то $BD \perp$ _____ и $\triangle ABO$ — _____, причем гипотенуза _____ = 13 см по условию, а катет $BO = \frac{1}{2}$ _____ = $\frac{1}{2} \cdot$ _____ см = _____ см. По теореме Пифагора находим: $AO = \sqrt{\text{_____} - \text{_____}} = \sqrt{\text{_____} - \text{_____}}$ см = _____ см, $AC = 2$ _____ = $2 \cdot$ _____ см = _____ см.

2) Площадь ромба можно вычислить по формуле $S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ (задача 476 учебника), откуда $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot$ _____ см \cdot _____ см = _____ см².

О т в е т. _____ см².



49

Найдите меньшую высоту треугольника со сторонами 15, 20 и 25.

Решение.

Так как $25^2 = 20^2 + 15^2$ ($625 = 400 + 225$), то по теореме, обратной _____, данный треугольник — _____ . Гипотенуза является наибольшей стороной этого треугольника, а высота h , проведенная к гипотенузе, _____

Так как $h \cdot 25 = 15 \cdot 20$, то $h =$ _____ = _____

О т в е т. _____

50

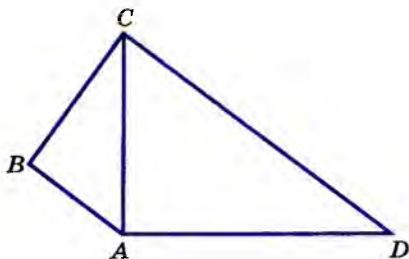
Найдите площадь четырехугольника $ABCD$, если $AB = 9$ см, $BC = 12$ см, $CD = 25$ см, $AD = 20$ см, $AC = 15$ см.

Решение.

1) Так как $15^2 = 12^2 + 9^2$ и $25^2 = 20^2 + 15^2$, то по теореме, обратной _____, треугольники ABC и DAC — _____

2) $S_{ABCD} = S_{ABC} +$ _____ = $\frac{1}{2}$ _____ \cdot _____ + $\frac{1}{2}$ _____ \cdot _____ = _____ (см²).

О т в е т. _____ см².



Подобные треугольники

§ 1

Определение подобных треугольников

51

Даны отрезки: $AB = 12$ см, $CD = 8$ см, $EF = 15$ см, $KL = 30$ см, $MN = 16$ см, $PQ = 20$ см. Найдите среди них пары пропорциональных отрезков.

Решение.

1) Так как $\frac{AB}{EF} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, $\frac{MN}{PQ} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$, то $\frac{AB}{EF} = \frac{MN}{PQ}$, т. е. отрезки AB и MN пропорциональны отрезкам EF и PQ .

2) Так как $\frac{CD}{MN} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$, $\frac{EF}{PQ} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$, то $\frac{CD}{MN} \neq \frac{EF}{PQ}$, т. е. отрезки CD и MN не пропорциональны отрезкам EF и PQ .

3) Так как $\frac{AB}{CD} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$, $\frac{KL}{PQ} = \frac{30}{20} = \frac{3}{2}$, то $\frac{AB}{CD} = \frac{KL}{PQ}$, т. е. отрезки AB и KL пропорциональны отрезкам CD и PQ .

О т в е т. AB и MN ; AB и KL .

52

Подобны ли треугольники ABC и DEF , в которых $\angle A = 98^\circ$, $\angle B = 44^\circ$, $\angle F = 38^\circ$, $\angle D = 98^\circ$, $AB = 12$, $AC = 21$, $BC = 30$, $DF = 7$, $EF = 10$, $DE = 4$?

Решение.

1) $\angle A = \angle D = 98^\circ$ по условию. В треугольнике ABC имеем: $\angle C = 180^\circ - (98^\circ + 44^\circ) = 38^\circ$, поэтому $\angle C = \angle F = 38^\circ$. В треугольнике DEF имеем: $\angle E = 180^\circ - (98^\circ + 38^\circ) = 24^\circ$, поэтому $\angle B = \angle E = 24^\circ$.

Итак, углы треугольников ABC и DEF соответственно равны.

2) Рассмотрим отношения сходственных сторон треугольников

ABC и DEF : $\frac{AB}{DE} = \frac{12}{4} = \frac{3}{1}$, $\frac{AC}{DF} = \frac{21}{7} = \frac{3}{1}$, $\frac{BC}{EF} = \frac{30}{10} = \frac{3}{1}$, поэтому

$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$, т. е. стороны треугольника ABC _____

Итак, $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ по _____

О т в е т .

Треугольники ABC и DEF _____

53

В подобных треугольниках ABC и EDF стороны AB и ED , BC и DF являются сходственными. Найдите стороны AB и AC треугольника ABC , если $ED = 3$ см, $DF = 5$ см, $EF = 7$ см, $BC = 15$ см.

Р е ш е н и е .

В подобных треугольниках ABC и EDF стороны BC и DF являются сходственными по условию, поэтому коэффициент k подобия этих треугольников равен $\frac{BC}{DF}$, т. е. $k = \underline{\quad} : \underline{\quad} = \underline{\quad}$

Следовательно, $AB = k \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}$ см = $\underline{\quad}$ см,
 $AC = k \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}$ см = $\underline{\quad}$ см.

О т в е т .

$AB = \underline{\quad}$ см, $AC = \underline{\quad}$ см.

54

Площади двух подобных треугольников равны 35 дм² и 315 дм². Одна из сторон первого треугольника равна 14 дм. Найдите сходственную ей сторону второго треугольника.

Р е ш е н и е .

Пусть k — коэффициент подобия треугольников, тогда по теореме об отношении площадей подобных треугольников получим: $k^2 = \underline{\quad}$ дм²: $\underline{\quad}$ дм² = $\underline{\quad}$, откуда $k = \underline{\quad}$. Искомая сторона a второго треугольника в $\underline{\quad}$ раза больше сходственной ей стороны первого треугольника, т. е. $a = \underline{\quad} \cdot 14$ дм = $\underline{\quad}$ дм.

О т в е т . $\underline{\quad}$ дм.

55

На рисунке $DE \parallel AC$. Докажите, что треугольники ABC и DBE подобны, и найдите коэффициент подобия k , если $AB = 21$ см, $AD = 7$ см.

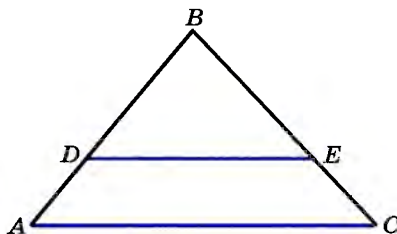
Решение.

1) $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ по двум углам (\angle — общий, $\angle A =$ —, так как эти углы — при пересечении параллельных прямых — и секущей —).

2) Так как коэффициент k подобия треугольников ABC и DBE равен отношению сходственных сторон, то $k = AB :$ —

$DB = AB -$ — = — см — см = — см, и поэтому $k =$ — см : — см = —

О т в е т. —



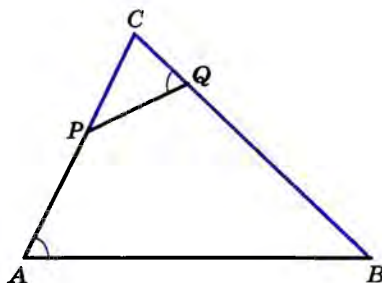
56

На рисунке $\angle PQC = \angle A$, $BC = 18$ см, $CP = 6$ см, $CQ = 4$ см. Найдите сторону AC .

Решение.

$\triangle CPQ \sim \triangle CBA$ по — (\angle — общий, $\angle PQC = \angle$ — по условию). Стороны CP и CB , CQ и — — сходственные стороны этих подобных треугольников, поэтому коэффициент k подобия равен $CP :$ — = — см : — см = — и $CQ : AC =$ —, откуда $AC =$ — $CQ =$ — см.

О т в е т. — см.



На рисунке $\angle B = \angle D$, $\frac{AF}{CF} = \frac{3}{2}$,
 $BF = 15$ см. Найдите DF .

Решение.

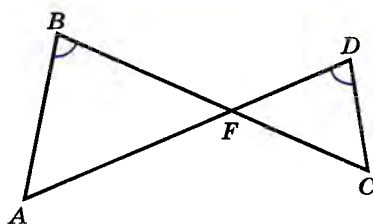
1) $\triangle ABF \sim \triangle CDF$ по _____
 ($\angle \underline{\hspace{1cm}} = \angle \underline{\hspace{1cm}}$ по условию, $\angle AFB =$
 $= \angle \underline{\hspace{1cm}}$, так как эти углы _____
 _____).

2) AF и FC — сходственные стороны подобных треугольников
 ABF и CDF , поэтому коэффициент k подобия равен $\underline{\hspace{1cm}} : \underline{\hspace{1cm}} =$
 $= \underline{\hspace{1cm}}$

3) Так как BF и DF тоже являются сходственными сторонами,
 то $BF : DF = \underline{\hspace{1cm}}$, откуда $DF = \underline{\hspace{1cm}} BF = \underline{\hspace{1cm}}$ см =
 $= \underline{\hspace{1cm}}$ см.

Ответ.

_____ см.



Диагонали трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, пересекаются в точке O , $BO = 3,2$ см, $OD = 6,4$ см, $BC = 4,8$ см. Найдите AD .

Доказательство.

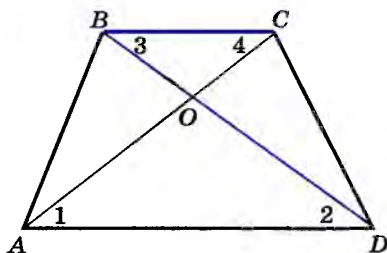
1) $\triangle AOD \sim \triangle COB$ по _____
 _____ ($\angle 1 = \angle \underline{\hspace{1cm}}$,
 $\angle 2 = \angle \underline{\hspace{1cm}}$, так как эти углы —
 _____ при
 пересечении параллельных прямых
 _____ и _____ секущими _____ и _____).

2) OD и OB — сходственные стороны подобных треугольников
 AOD и COB , поэтому $k = \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$ см : _____ см = _____

3) AD и BC также сходственные стороны этих треугольников, по-
 этому $AD : BC = k$, откуда $AD = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}}$ см =
 $= \underline{\hspace{1cm}}$ см.

Ответ.

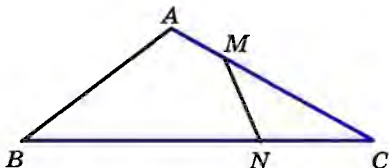
_____ см.



На рисунке $BC = 18$ см, $CM = 9$ см, $CN = 6$ см, $AC = 12$ см. Докажите, что треугольники ABC и MNC подобны.

Доказательство.

$\angle C$ — _____ угол треугольников _____ и _____. Рассмотрим отношения сторон, заключающих этот угол: $AC : CN =$ _____ см : _____ см = _____, $BC : CM =$ _____ см : _____ см = _____. Эти отношения _____, поэтому стороны _____ и _____ треугольника ABC пропорциональны сторонам _____ и _____ треугольника MNC . Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle$ _____ по _____ признаку подобия треугольников.



Докажите, что треугольники MNP и CDE подобны, если стороны $MN = 7,5$ см, $MP = 4,5$ см, $PN = 6$ см, $DE = 24$ см, $EC = 18$ см, $CD = 30$ см.

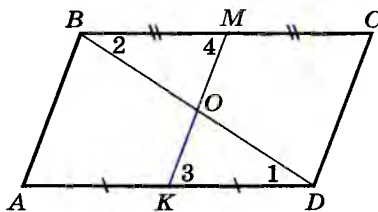
Доказательство.

Так как $MN : CD =$ _____ см : _____ см = _____, $MP : CE =$ _____ см : _____ см = _____ и $NP : DE =$ _____ см : _____ см = _____, то стороны MN , _____ и _____ треугольника MNP _____ сторонам _____, _____ и _____ треугольника _____. Следовательно, по _____ $\triangle MNP \sim \triangle CDE$.

§ 3

Применение подобия к решению задач и доказательству теорем

Точки K и M — середины сторон AD и BC параллелограмма $ABCD$, изображенного на рисунке. Отрезки KM и BD пересекаются в точке O . Докажите, что KO — средняя линия треугольника ABD .



Доказательство.

Докажем, что точка O — середина стороны _____ треугольника ABD . По условию задачи $DK = \frac{1}{2}$ _____ и $BM =$ _____ . Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм, следовательно, $AD =$ _____ , поэтому и KD _____ BM .

Так как $AD \parallel$ _____ , то $\angle 1 = \angle$ _____ и $\angle 3 = \angle$ _____ . Следовательно, $\triangle OKD = \triangle$ _____ . Отсюда получаем: $OD =$ _____

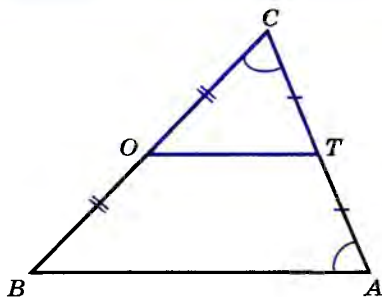
Итак, точки K и O — _____ сторон AD и _____ треугольника ABD , поэтому KO — его _____ линия, что и требовалось доказать.

62

В треугольнике ABC отрезок OT — средняя линия, $\angle A = \angle C$.

а) Докажите, что треугольник COT равнобедренный.

б) Найдите периметр треугольника COT , если периметр треугольника ABC равен 18 см.



Решение.

а) Так как OT — _____ линия треугольника ABC , то $OT \parallel$ _____ , поэтому $\angle CTO = \angle$ _____ = $\angle C$. Следовательно, треугольник COT — _____

б) Так как OT — средняя _____ треугольника ABC , то $OT = \frac{1}{2}$ _____ , $CO =$ _____ BC и $CT =$ _____ . Следовательно,

$$P_{COT} = OT + CO + \text{_____} = \frac{1}{2}AB + \text{_____} + \text{_____} =$$

$$= \text{_____} (AB + \text{_____} + \text{_____}) = \text{_____} P_{ABC} = \text{_____} \text{ см.}$$

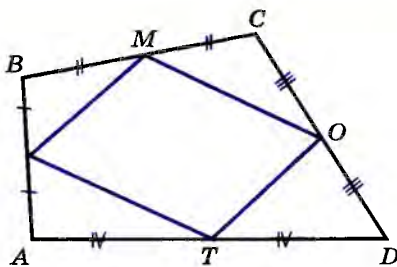
Ответ. _____

63

Точки K, M, O, T — середины сторон четырехугольника $ABCD$.

а) Докажите, что четырехугольник $KMOT$ — параллелограмм.

б) Найдите периметр четырехугольника $KMOT$, если $AC = 12$ см, $BD = 16$ см.



Решение.

а) Проведем диагональ AC четырехугольника $ABCD$. В треугольнике ABC точки K и M — _____ сторон AB и _____, поэтому отрезок KM — его средняя _____, и следовательно, $KM \parallel$ _____ и $KM = \frac{1}{2} AC$.

Аналогично отрезок OT — _____ линия треугольника ADC , поэтому $OT \parallel AC$ и $OT = \frac{1}{2} AC$. Отсюда следует, что $KM \parallel OT$ и $KM = OT$, а значит, четырехугольник $KMOT$ является _____.

б) По доказанному $KM = \frac{1}{2} AC = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$ (см) и $OT = KM = 6$ см. Проведем диагональ BD . В треугольниках ABD и BCD отрезки KT и MO — средние _____, следовательно, $KT = \frac{1}{2} BD = 6$ см и $MO = \frac{1}{2} BD = 6$ см. Итак, $KT = MO = 6$ см и $KM = OT = 6$ см, следовательно, $P_{KMOT} = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 24$ см.

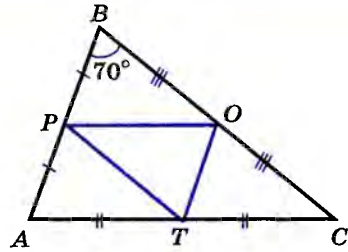
О т в е т . _____

64

Площадь треугольника ABC равна 20 см², $\angle B = 70^\circ$, точки P , T и O — середины сторон. Найдите: а) $\angle PTO$; б) площадь треугольника OTP .

Решение.

а) Так как точки P , T , O — _____ сторон, то отрезки PT , TO и PO — средние _____ треугольника ABC , следовательно, $PT \parallel BC$ и $TO \parallel AB$. Так как противоположные стороны четырехугольника $BPTO$ попарно _____, то этот четырехугольник является _____, поэтому $\angle PTO = \angle B = 70^\circ$.



б) Так как отрезки PT , TO и PO — средние _____ треугольника ABC , то $PT = \frac{1}{2} BC$, $TO = \frac{1}{2} AB$ и $PO = \frac{1}{2} AC$, т. е. $\frac{PT}{BC} = \frac{TO}{AB} = \frac{PO}{AC} = \frac{1}{2}$, поэтому $\triangle OTP \sim \triangle ABC$ с коэффициентом подобия $k = \frac{1}{2}$. Следовательно, $S_{OTP} : S_{ABC} = 1 : 4$, откуда получаем: $S_{OTP} = \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{1}{4} \cdot 20 = 5$ (см²).

О т в е т . а) $\angle PTO = 70^\circ$; б) $S_{OTP} = 5$ см².

Точка P — середина стороны AB треугольника ABC , $PM \parallel AC$. Докажите, что отрезок PM — средняя линия треугольника ABC .

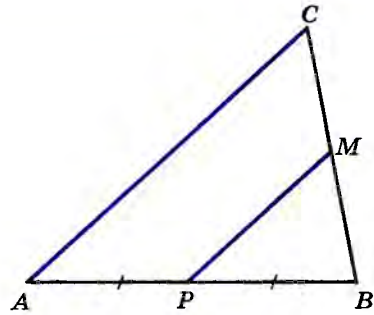
Доказательство.

Предположим, что отрезок PM не является средней _____ треугольника ABC , тогда точка M не будет серединой стороны _____.

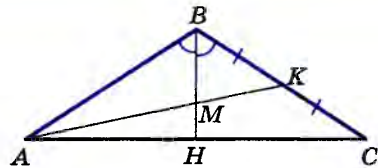
Пусть точка O — середина _____ BC , тогда отрезок PO есть _____ линия треугольника ABC , и поэтому $PO \parallel AC$.

Итак, через точку P проходят _____ прямые (_____ и _____), параллельные прямой _____, что противоречит аксиоме _____ прямых.

Следовательно, исходное предположение неверно, т. е. отрезок PM является _____ линией треугольника ABC , что и требовалось _____.



В треугольнике ABC стороны $AB = BC = 5$ м, $AC = 8$ м, медиана AK и биссектриса BH пересекаются в точке M . Найдите BM и AK .



Решение.

Так как $AB = BC$, то треугольник ABC — _____, а потому биссектриса BH является также его высотой и _____, следовательно, $BH \perp AC$ и $AH = HC =$ _____ м.

Медианы треугольника пересекаются в _____ точке и делятся ею в отношении _____ : _____, считая от вершины, т. е. $BM =$ _____ MH и $AM =$ _____ MK . В прямоугольном треугольнике ABH имеем: $BH^2 = AB^2 - AH^2 =$ _____ - _____ = _____ (м^2), откуда $BH =$ _____ м. Поэтому $MH =$ _____ $BH =$ _____ м, $BM =$ _____ м.

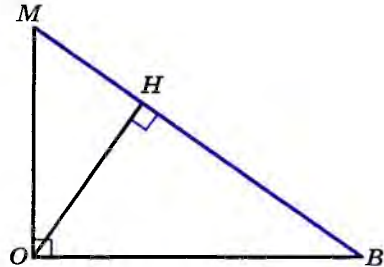
В треугольнике AMH имеем: $AM^2 =$ _____ + _____ = _____ + _____ = _____ (м^2), откуда $AM =$ _____ м. Следовательно, $AK = \frac{3}{2}$ _____ м.

Ответ. $BM =$ _____ м, $AK =$ _____ м.

В треугольнике OVM , изображенном на рисунке, $\angle VOM = 90^\circ$, $OH \perp VM$, $VM = 26$ дм, $VH = 18$ дм. Найдите OH и OV .

Решение.

Так как OH — _____ прямоугольного треугольника OVM , проведенная из вершины _____ угла, то $OV = \sqrt{VM \cdot \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad} \cdot \underline{\quad}} = \underline{\quad}$ (дм). Далее, $MH = VM - \underline{\quad} = \underline{\quad}$ дм, поэтому $OH = \sqrt{\underline{\quad} \cdot \underline{\quad}} = \sqrt{\underline{\quad} \cdot \underline{\quad}} = \underline{\quad}$ (дм).

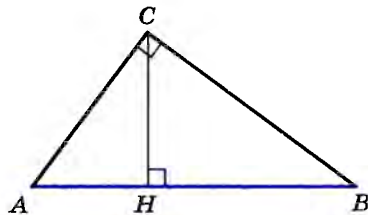


О т в е т. $OV = \underline{\quad}$ дм,
 $OH = \underline{\quad}$ дм.

Гипотенуза AB прямоугольного треугольника ABC равна 30 м, а отношение катетов равно 3:4. Найдите отрезки, на которые гипотенуза делится высотой треугольника.

Решение.

Пусть $AC = 3x$, тогда $BC = 4x$ и $(3x)^2 + (\underline{\quad})^2 = 30^2$. Отсюда $\underline{\quad} x^2 = \underline{\quad}$, $x^2 = \underline{\quad}$ и $x = \underline{\quad}$. Следовательно, $AC = \underline{\quad}$ м и $BC = \underline{\quad}$ м. Но $AC = \sqrt{AB \cdot \underline{\quad}}$, поэтому $AC^2 = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad}$, или $18^2 = 30 \cdot \underline{\quad}$, откуда $AH = \underline{\quad}$ м, а $BH = 30 - \underline{\quad} = \underline{\quad}$ (м).

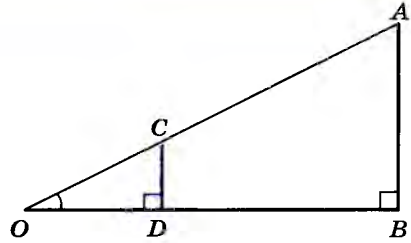


О т в е т. $AH = \underline{\quad}$ м,
 $BH = \underline{\quad}$ м.

Длина тени столба равна 10 м, а длина тени человека, рост которого равен 1,8 м, равна 3,6 м. Найдите высоту столба.

Решение.

Изобразим отрезками AB и OB столб и его тень, отрезками CD и OD покажем



человека и его тень. В треугольниках OCD и OAB угол O — общий, $\angle ODC = \angle \text{---} = 90^\circ$, следовательно, $\triangle OCD \sim \triangle OAB$. Отсюда

получаем, что $OD : CD = OB : \text{---}$, а значит, $AB = \frac{OB \cdot \text{---}}{OD} = \text{---} = \text{---}$ (м).

О т в е т. Высота --- равна --- м.

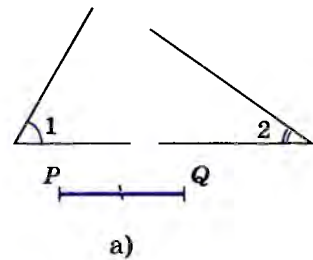
70

Постройте треугольник по двум углам и медиане, проведенной из вершины третьего угла.

Решение.

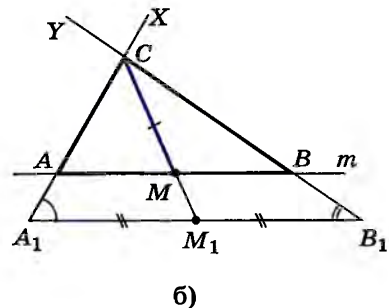
Пусть даны углы 1 и 2 и отрезок PQ . Требуется построить треугольник ABC , у которого $\angle A = \angle 1$, $\angle B = \angle 2$, а медиана CM равна --- PQ .

Построим сначала треугольник, подобный искомому. Для этого:



1) Проведем отрезок A_1B_1 .

2) От луча A_1B_1 отложим угол B_1A_1X , равный углу 1, и от луча B_1A_1 — угол A_1B_1Y , равный углу --- , как показано на рисунке. Точку пересечения лучей A_1X и B_1Y обозначим буквой C .



3) Проведем медиану CM_1 полученного треугольника ---

4) На луче CM_1 от точки --- отложим отрезок CM , равный данному отрезку ---

5) Через точку M проведем прямую m , параллельную прямой A_1B_1 . Точки пересечения прямой m и лучей CA_1 и _____ обозначим буквами A и B .

Треугольник ABC — искомый. Действительно, так как AB _____ A_1B_1 , то $\angle BAC = \angle$ _____, $\angle AMC = \angle$ _____, следовательно, $\triangle AMC \sim \triangle A_1M_1C$, а потому $AM : A_1M_1 = CM : \text{_____}$. Аналогично $\triangle BMC \sim \triangle B_1M_1C$, а потому $BM : \text{_____} = CM : CM_1$. Следовательно, $AM : A_1M_1 = BM : \text{_____}$, но $A_1M_1 = \text{_____}$, поэтому $AM \text{ _____ } BM$, т. е. отрезок CM — медиана треугольника _____ и она равна данному отрезку _____. Как было доказано, $\angle BAC = \angle$ _____, но \angle _____ = $\angle 1$, следовательно, $\angle BAC \text{ _____ } \angle 1$. Аналогично $\angle ABC \text{ _____ } \angle 2$. Поэтому треугольник ABC удовлетворяет всем требованиям задачи.

§ 4

Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника

71

Найдите синус, косинус и тангенс угла M треугольника MPT , если $\angle P = 90^\circ$, $MP = 8$, $PT = 15$.

Р е ш е н и е.

Синусом острого _____ прямоугольного треугольника называется отношение _____ катета к _____. Против угла M лежит катет _____. По теореме _____ найдем гипотенузу: $MT^2 = 8^2 + \text{_____} = \text{_____}$, откуда $MT = \text{_____}$. Следовательно, $\sin M = \frac{PT}{\text{_____}} = \frac{15}{\text{_____}}$.

Косинусом острого угла _____ треугольника называется отношение _____ к _____. К углу M прилежит катет _____, следовательно, $\cos M = \frac{MP}{\text{_____}} = \frac{8}{\text{_____}}$.

Тангенсом _____ угла прямоугольного треугольника называется _____ противолежащего катета к _____, т. е. $\text{tg } M = \frac{\text{_____}}{\text{_____}} = \text{_____}$.

О т в е т. _____

Докажите, что в треугольнике BCH с прямым углом H выполняются следующие равенства:

а) $\sin B = \cos C$;

б) $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}$;

в) $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$.

Доказательство.

а) $\sin B = \frac{CH}{BC} \cos C = \frac{CH}{BC}$, следовательно, $\sin B = \cos C$;

б) $\sin B = \frac{CH}{BC}$, $\cos B = \frac{BH}{BC}$, $\operatorname{tg} B = \frac{CH}{BH}$, поэтому $\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{CH}{BH} = \operatorname{tg} B$;

в) $\sin C = \frac{BH}{BC}$, $\cos C = \frac{CH}{BC}$, $\sin^2 C + \cos^2 C = \left(\frac{BH}{BC}\right)^2 + \left(\frac{CH}{BC}\right)^2 = \frac{BH^2 + CH^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1$.

Гипотенуза AC прямоугольного треугольника ACE равна 50, $\sin A = \frac{7}{25}$. Найдите площадь треугольника.

Решение.

Синусом острого _____ прямоугольного треугольника называется отношение _____ к _____. Против угла A лежит катет _____, следовательно, $\sin A = \frac{CE}{AC}$, откуда $CE = AC \cdot \sin A = 50 \cdot \frac{7}{25} = 14$.

Второй катет _____ найдем, используя теорему Пифагора: $AE = \sqrt{AC^2 - CE^2} = \sqrt{50^2 - 14^2} = 48$.

Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения катетов, поэтому $S_{ACE} = \frac{1}{2} AE \cdot CE = \frac{1}{2} \cdot 48 \cdot 14 = 336$.

Ответ.

В треугольнике ABC даны $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $AC = 9$. Найдите сторону AB .

Р е ш е н и е .

По условию задачи $\angle A = \underline{\hspace{2cm}}$, следовательно, отрезок AC — катет, противолежащий углу $\underline{\hspace{2cm}}$, и требуется найти катет, прилежащий к углу $\underline{\hspace{2cm}}$

Отношение катета, противолежащего углу B , и катета, прилежащего к этому углу, есть $\underline{\hspace{2cm}}$ угла B , следовательно,

но, $\frac{AC}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$. Отсюда $AB = AC : \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} : \text{tg } 60^\circ =$
 $= \underline{\hspace{2cm}}$

О т в е т . $\underline{\hspace{2cm}}$

В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна c , а один из острых углов равен α . Выразите катеты через c и α и найдите их длины, если:

а) $c = 12$ дм, $\alpha = 30^\circ$;

б) $c = 16$ дм, $\alpha = 45^\circ$.

Р е ш е н и е .

Обозначим длину катета, противолежащего углу α , буквой a и длину $\underline{\hspace{2cm}}$, прилежащего к углу α , буквой b .

Тогда $\sin \alpha = \frac{\underline{\hspace{2cm}}}{c}$, $\cos \alpha = \frac{\underline{\hspace{2cm}}}{c}$. Отсюда получаем: $a = c \cdot \underline{\hspace{2cm}}$,

$b = \underline{\hspace{2cm}}$. Подставляя числовые данные, получим:

а) $a = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \sin 30^\circ = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (дм);

$b = \underline{\hspace{2cm}}$ (дм).

б) $a = \underline{\hspace{2cm}}$ (дм);

$b = \underline{\hspace{2cm}}$ (дм).

О т в е т .

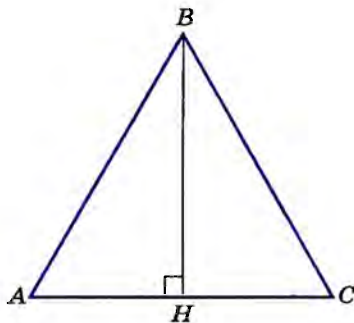
а) $\underline{\hspace{2cm}}$

б) $\underline{\hspace{2cm}}$

Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a .

Решение.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot \underline{\hspace{2cm}}$, где отрезок BH —
 _____ треугольника. В
 прямоугольном треугольнике ABH
 гипотенуза AB равна _____, $\angle A =$
 $=$ _____, BH — _____,
 противолежащий углу A . Следовательно,
 но, $\sin A = \frac{BH}{AB}$, откуда $BH = \underline{\hspace{1cm}} \times$
 $\times \sin A = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \sin 60^\circ = \underline{\hspace{1cm}} \cdot \underline{\hspace{1cm}} =$
 $=$ _____



Итак, $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} a^2$.

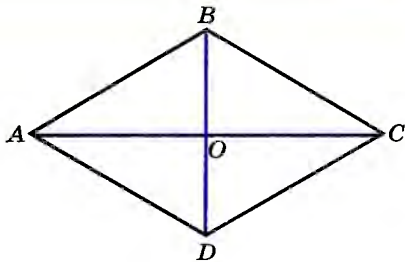
Ответ.

77

Найдите углы ромба $ABCD$, если его диагонали AC и BD равны $4\sqrt{3}$ м и 4 м.

Решение.

Пусть $\angle BAO = \alpha$. Диагонали ромба делят его углы _____, значит, $\angle DAO = \angle \underline{\hspace{2cm}} = \alpha$.



Диагонали ромба взаимно _____ и точкой пересечения делятся _____, следовательно, в прямоугольном треугольнике ABO катет AO равен _____ м, а катет _____ равен _____ м. Поэтому $\operatorname{tg} \alpha = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$, откуда $\alpha = \underline{\hspace{1cm}}$, а $\angle BAD = 2 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$, $\angle ADC = \angle \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$

Ответ.

§ 1

Касательная к окружности

78

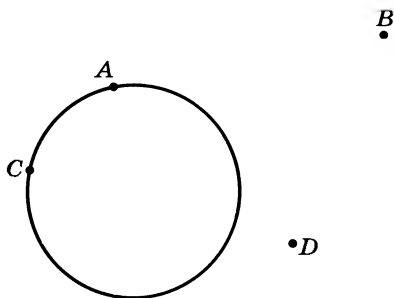
Проведите прямые через каждые две точки. Сколько общих точек имеет каждая из прямых с окружностью?

О т в е т.

Прямая _____ и окружность не имеют общих точек.

Прямая _____ и окружность имеют только одну _____ точку.

Прямые _____, _____, _____, _____ и окружность имеют две общие точки.



79

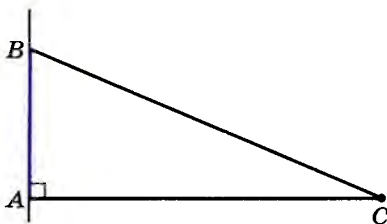
В треугольнике ABC , изображенном на рисунке, $\angle A = 90^\circ$, $AB = 5$ см, $BC = 13$ см. Найдите радиус окружности с центром C , если она имеет с прямой AB только одну общую точку.

Р е ш е н и е.

По условию задачи окружность и прямая _____ имеют только _____ общую точку.

Если бы радиус окружности был меньше расстояния от _____ окружности — точки _____ — до прямой AB , то окружность и прямая имели бы _____ общие точки.

Если бы радиус _____ был больше расстояния от точки _____ до _____ AB , то окружность и прямая _____ общих точек.



Следовательно, радиус R окружности _____ расстоянию от точки C до _____ AB , т. е. равен катету _____
Итак, $R = AC = \sqrt{\text{_____} - \text{_____}} = \sqrt{\text{_____}} = \text{_____}$ (см).

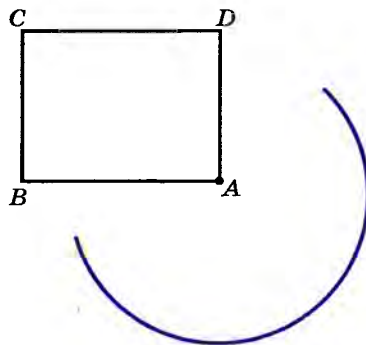
О т в е т. Радиус окружности равен _____ см.

80

Дан прямоугольник $ABCD$, где $AB = 8$ см, $AD = 6$ см. Какие из прямых AC , BC , CD и BD являются секущими по отношению к окружности с центром A радиуса 6 см?

Р е ш е н и е.

Прямая AC проходит через центр _____ — точку A , следовательно, прямая AC является _____ по отношению к окружности с _____ A .



Так как $\angle B = 90^\circ$, то $AB \perp BC$, поэтому расстояние от точки A до _____ BC равно _____ см, т. е. больше _____ окружности. Следовательно, прямая BC _____ секущей по отношению к данной окружности.

Так как $\angle D = 90^\circ$, то $AD \perp CD$, поэтому расстояние от _____ A до _____ CD равно _____ см, т. е. _____ радиусу окружности. Следовательно, прямая CD _____ по отношению к данной окружности.

Чтобы найти расстояние от точки A до _____ BD , проведем из точки _____ перпендикуляр AH к прямой BD и вычислим его _____. Находя двумя способами площадь треугольника ABD , получим: $\frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} BD \cdot \text{_____}$. По теореме Пифагора $BD = \sqrt{\text{_____} + \text{_____}} = \text{_____}$ см. Поэтому $AH = \text{_____}$ см.

Итак, расстояние от точки A до прямой BD _____ радиуса окружности, следовательно, прямая BD _____ секущей по отношению к данной _____

О т в е т. Секущими являются прямые _____ и _____

Какая из прямых AC , BC , CD и BD из предыдущей задачи является касательной к окружности с центром A радиуса 6 см?

Решение.

Касательной к _____ называется _____, имеющая с окружностью только _____ точку. Прямая и окружность имеют только одну _____ точку, если расстояние от центра _____ до прямой равно _____ окружности. Это условие выполняется для прямой _____, значит, касательной к данной _____ является прямая _____

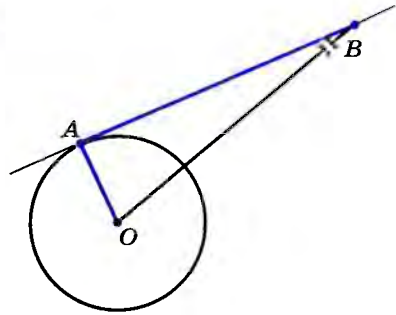
Ответ. Касательной является прямая _____

Прямая AB — касательная в точке A к окружности с центром O . Найдите длину отрезка OB , если $AB = 24$ дм, а радиус окружности равен 7 дм.

Решение.

По условию задачи прямая AB является _____ к данной окружности, следовательно, прямая AB _____ к радиусу OA , проведенному в _____ касания. Поэтому треугольник AOB — _____. По теореме Пифагора $OB^2 = OA^2 +$ _____, отсюда $OB =$ _____ дм.

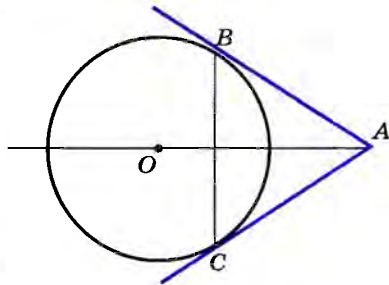
Ответ. $OB =$ _____ дм.



Прямые AB и AC касаются окружности с центром O в точках B и C . Найдите угол BAO , если $AB = BC$.

Решение.

Так как отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, _____, то $AB =$ _____, следовательно, треугольник ABC — _____, поэтому $\angle BAC =$ _____

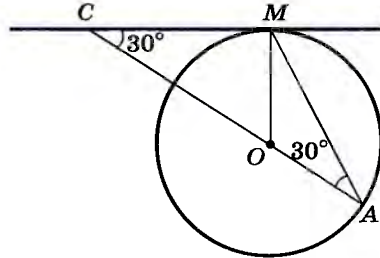


Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной _____, составляют _____ углы с прямой, проходящей через эту точку и _____ окружности, следовательно, $\angle BAO = \angle ______ = \frac{1}{2} \angle ______ = ______$

О т в е т. $\angle BAO = ______$

84

Прямая AC проходит через центр O окружности, $\angle MAO = \angle OCM = 30^\circ$. Докажите, что прямая CM является касательной к данной окружности.



До к а з а т е л ь с т в о.

Так как в треугольнике AOM $AO = ______ = ______$, то $\angle AMO = \angle ______ = ______$.

В треугольнике AMC $\angle AMC = 180^\circ - (\angle MAC + \angle ______) = 180^\circ - (______ + ______) = ______$. Поэтому $\angle OMC = \angle AMC - \angle ______ = 120^\circ - ______ = ______ , т. е. CM \perp OM$.

Итак, прямая CM проходит через конец радиуса _____, лежащий на окружности, и перпендикулярна к этому радиусу. Поэтому она является _____ к данной окружности, что и требовалось _____

§ 2

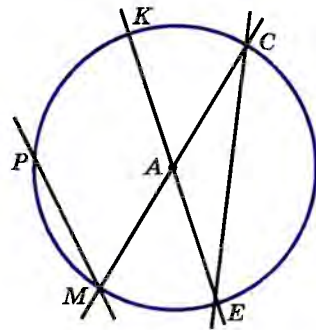
Центральные и вписанные углы

85

Какие углы являются центральными углами окружности с центром A ?

Р е ш е н и е.

Центральным _____ окружности называется угол с вершиной в _____ . На рисунке центр окружности — точка _____ служит вершиной углов MAE , _____, _____, _____, _____ . Эти углы являются центральными углами данной _____

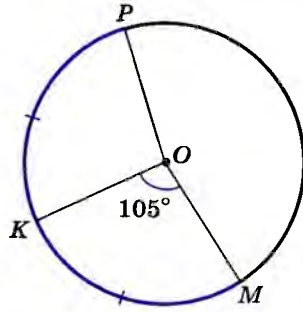


О т в е т. _____

Точка O — центр окружности, $\angle MOK = 105^\circ$, $\sphericalangle PK = \sphericalangle MK$. Найдите градусную меру угла MOP .

Решение.

Угол MOK является _____
 _____ углом окружности, а дуга MK
 меньше полуокружности, поэтому
 $\sphericalangle MK = \angle$ _____ = _____. По условию
 задачи $\sphericalangle PK = \sphericalangle$ _____, и, значит, гра-
 дусная мера дуги PK равна _____. $\sphericalangle MKP = \sphericalangle MK +$ _____ =
 = _____ $> 180^\circ$, т. е. дуга MKP больше полуокружности, поэтому
 $\sphericalangle MKP =$ _____ $- \angle MOP$, поэтому $\angle MOP =$ _____ $- \sphericalangle MKP =$
 = _____ $-$ _____ = _____



О т в е т. $\angle MOP =$ _____

Какие из углов HAM , HBM , TCE и HPM являются вписанными?

Решение.

Вписанным углом называется угол, вершина которого лежит на _____, а стороны _____ окружность.

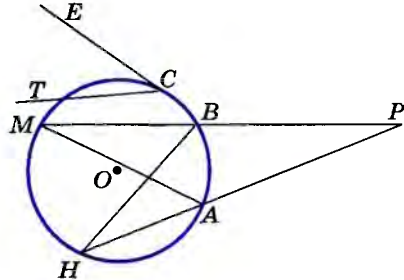
Точка A лежит на окружности, а стороны угла HAM _____ окружность. Следовательно, угол _____ вписанным.

Точка B лежит на _____, а стороны угла HBM пересекают _____, следовательно, угол HBM _____

Точка C _____, а сторона CE угла TCE не пересекает _____, следовательно, угол TCE _____ вписанным.

Точка P _____ на окружности, следовательно, угол HPM _____ вписанным.

О т в е т. Вписанными являются углы _____ и _____



На рисунке точка O — центр окружности, $\angle AOB = 92^\circ$. Найдите $\angle ACB$.

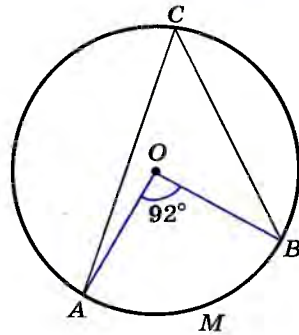
Решение.

Угол AOB является _____ углом данной окружности и равен _____, следовательно, $\sphericalangle AMB =$ _____

Угол ACB является _____ и опирается на дугу _____, поэтому

$$\angle ACB = \frac{1}{2} \text{ _____} = \text{ _____}$$

Ответ. $\angle ACB =$ _____

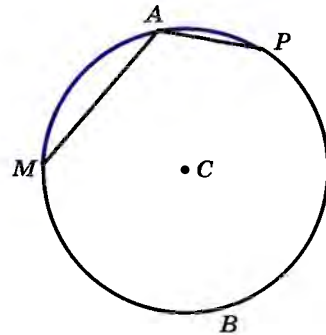


На рисунке $\sphericalangle MAP = 120^\circ$. Найдите $\angle MAP$.

Решение.

Угол MAP является _____ углом окружности и опирается на дугу _____. $\sphericalangle MBP = 360^\circ - \sphericalangle$ _____ = $360^\circ -$ _____ = _____, $\angle MAP =$ _____ = $\frac{1}{2}$ _____ = _____

Ответ. $\angle MAP =$ _____



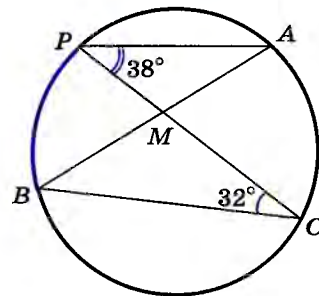
На рисунке $\angle APM = 38^\circ$, $\angle BSM = 32^\circ$. Найдите $\angle AMP$.

Решение.

Вписанные углы PAB и BCP _____ на одну и ту же _____ BP , следовательно, $\angle PAB = \angle$ _____ = _____

Из треугольника AMP получим: $\angle AMP = 180^\circ - (\angle$ _____ + \angle _____) = $180^\circ -$ (_____ + _____) = _____

Ответ. $\angle AMP =$ _____

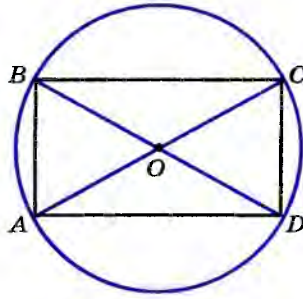


Дана окружность с диаметрами AC и BD . Докажите, что четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник.

Доказательство.

Отрезок AC — _____ окружности, следовательно, дуга ADC — полуокружность. Вписанный угол ABC опирается на _____, поэтому он _____

Аналогично углы ADC , _____ и _____ прямые. Следовательно, четырехугольник $ABCD$ является _____



Точки A, B, C лежат на одной окружности, $\angle ABC = 80^\circ$. Лежит ли центр окружности на отрезке AC ?

Решение.

Если центр окружности лежит на отрезке AC , то отрезок AC является _____ этой окружности, а дуга AC является _____. Тогда вписанный угол ABC опирается на полуокружность, а потому он равен _____, но по условию задачи $\angle ABC =$ _____. Следовательно, центр окружности _____ на отрезке AC .

Ответ. _____

Хорды KM и PT пересекаются в точке C , $KC = 7$ см, $CM = 4$ см, $PT = 16$ см. Найдите отрезки PC и CT .

Решение.

Хорды KM и PT пересекаются, следовательно, произведение _____ хорды KM равно _____ отрезков хорды _____, т. е. $PC \cdot$ _____ = $KC \cdot$ _____. Обозначим длину отрезка PC буквой x , тогда $CT =$ _____, следовательно, $x \cdot$ (_____) = $7 \cdot$ _____. Корни полученного квадратного уравнения $x^2 -$ _____ $x +$ _____ = 0 равны _____ и _____. Итак, либо $PC =$ _____, и тогда $CT =$ _____, либо $PC =$ _____, и тогда $CT =$ _____

Ответ. $PC =$ _____ см, $CT =$ _____ см или $PC =$ _____ см, $CT =$ _____ см.

Точки A , B и C лежат на одной окружности. Отрезки AB и CH пересекаются в точке M . Лежит ли точка H на данной окружности, если $AM = 5$ м, $MB = 6$ м, $CM = 8$ м, $MH = 4$ м?

Решение.

Если точка H лежит на данной окружности, то отрезки AB и CH являются хордами этой _____, пересекающимися в точке _____. Поэтому должно быть верным равенство $AM \cdot \text{_____} = \text{_____} \cdot \text{_____}$. Но так как $5 \cdot 6 \text{ _____ } 8 \cdot 4$, то точка H _____ на данной окружности.

Ответ. _____

§ 3

Четыре замечательные точки треугольника

95

На рисунке $\angle ABC = 120^\circ$, $NB \perp BC$, $BN = 4$ см. Вычислите расстояние от точки N до стороны BA угла ABC .

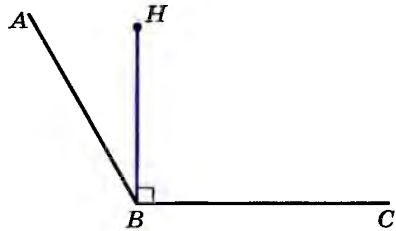
Решение.

Проведем из точки _____ перпендикуляр NM к прямой BA , тогда расстояние от точки N до прямой _____ равно длине отрезка _____.

По условию задачи $\angle ABC = \text{_____}$, $NB \perp BC$, т. е. $\angle \text{_____} = 90^\circ$. Значит, $\angle ABN = 120^\circ - \text{_____} = \text{_____}$

В треугольнике NBM $\angle MBN = \text{_____}$, $\angle NMB = \text{_____}$, следовательно, $NM = \frac{1}{2} \text{_____} = \text{_____} \cdot 4 = \text{_____}$ (см), т. е. расстояние от точки _____ до прямой _____ равно _____ см.

Ответ. _____



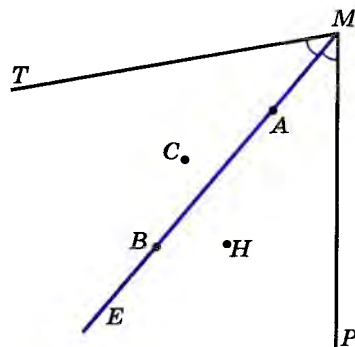
96

Луч ME является биссектрисой угла TMP . Верно ли, что:

- точка A равноудалена от сторон угла TMP ;
- точка B не равноудалена от сторон угла TMP ;
- точка H равноудалена от сторон угла TMP ;
- точка C не равноудалена от сторон угла TMP ?

Решение.

а) Точка A лежит на биссектрисе ME угла _____, поэтому она _____ от сторон этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке A _____



б) Точка B лежит на _____ ME угла TMP , поэтому она _____ от _____ этого угла. Следовательно, данное утверждение о точке B _____

в) Если бы точка H была равноудалена от _____ угла TMP , то она лежала бы на _____ этого угла. Но точка H _____ на биссектрисе угла _____. Следовательно, данное утверждение о точке H _____

г) Если бы точка C была равноудалена от _____, то она _____ на биссектрисе этого _____. Следовательно, данное утверждение о точке C _____

97

Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекаются в точке M . Найдите $\angle ABM$, если $\angle MAC = 30^\circ$, $\angle MCA = 20^\circ$.

Решение.

Биссектрисы треугольника пересекаются в _____ точке, следовательно, луч BM — _____

_____ угла ABC , т. е.

$\angle ABM = \frac{1}{2} \angle$ _____. По условию задачи лучи AM и CM _____

_____ углов A и _____, поэтому

$\angle A = 2 \cdot$ _____ = _____, $\angle C = 2 \cdot$ _____ =

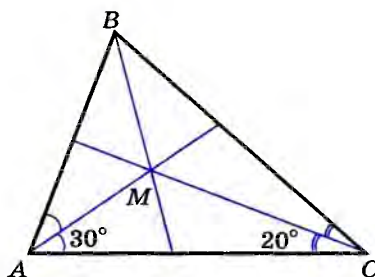
= _____. Следовательно, $\angle B = 180^\circ -$

$-(\angle$ _____ $+$ \angle _____) = $180^\circ -$ (_____ +

_____) = _____, значит, $\angle ABM =$

= $\frac{1}{2} \angle$ _____ = _____

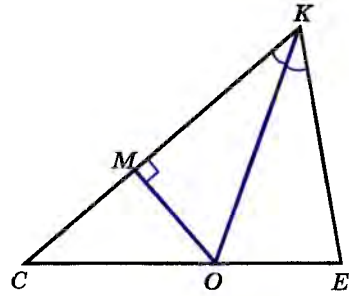
Ответ. $\angle ABM =$ _____



На рисунке даны $\angle OKC = \angle EKO$, $OM \perp KC$, $OM = 7$ см. Найдите расстояние от точки O до прямой KE .

Решение.

По условию задачи луч KO является _____ угла _____, поэтому точка O _____ от сторон этого угла, т. е. от прямых _____ и _____



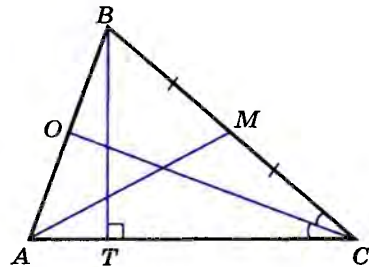
Расстоянием от точки O до прямой CK является длина _____ OM , проведенного из точки _____ к этой прямой, т. е. расстояние от точки _____ до _____ CK равно _____ см. Поэтому расстояние от _____ O до _____ KE равно _____ см.

Ответ. _____

В треугольнике ABC , изображенном на рисунке, $AC = BC \neq AB$, $BM = MC$, $BT \perp AC$, $\angle ACO = \angle BCO$. Какая из прямых AM , CO , BT является средним перпендикуляром к стороне треугольника ABC ?

Решение.

Прямая называется средним перпендикуляром к отрезку, если она проходит через _____ этого отрезка и _____ к нему.



По условию задачи $BM =$ _____, но прямая AM не перпендикулярна к _____ BC , так как в противном случае отрезок AM был бы медианой и _____ треугольника ABC , а тогда были бы равны стороны AB и _____, что неверно. Следовательно, прямая AM _____ средним перпендикуляром _____ к стороне BC .

По условию задачи $BT \perp \underline{\hspace{2cm}}$, но $AT \underline{\hspace{1cm}} CT$, так как в противном случае отрезок BT был бы высотой и $\underline{\hspace{2cm}}$ треугольника ABC , а тогда были бы $\underline{\hspace{2cm}}$ стороны AB и BC , что неверно. Следовательно, прямая BT $\underline{\hspace{2cm}}$ серединным $\underline{\hspace{2cm}}$ к стороне AC .

По условию задачи $\angle ACO = \angle \underline{\hspace{2cm}}$ и $AC = \underline{\hspace{2cm}}$, т. е. отрезок CO является $\underline{\hspace{2cm}}$ равнобедренного треугольника, а потому он является также его медианой и $\underline{\hspace{2cm}}$. Следовательно, прямая CO проходит через $\underline{\hspace{2cm}}$ отрезка AB и $\underline{\hspace{2cm}}$ к этому отрезку, т. е. $\underline{\hspace{2cm}}$ серединным $\underline{\hspace{2cm}}$ к стороне $\underline{\hspace{2cm}}$.

О т в е т.

Серединным $\underline{\hspace{2cm}}$ к стороне треугольника ABC является прямая $\underline{\hspace{2cm}}$.

100

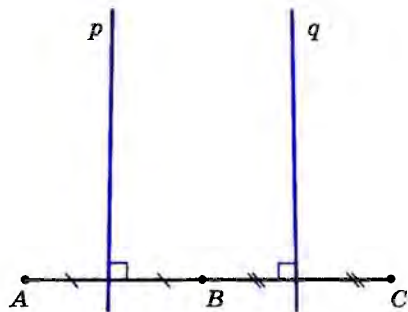
Точки A , B и C не лежат на одной прямой; прямые p и q — серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC . Докажите, что прямые p и q пересекаются.

Д о к а з а т е л ь с т в о .

Предположим, что прямые p и q не пересекаются. По условию задачи $p \perp AB$, а из предположения следует, что $p \parallel q$, значит, по свойству параллельных прямых $AB \perp q$. Итак, через точку B проходят $\underline{\hspace{2cm}}$ прямые AB и $\underline{\hspace{2cm}}$, перпендикулярные к прямой q , что невозможно.

Следовательно, наше предположение неверно, а значит, серединные

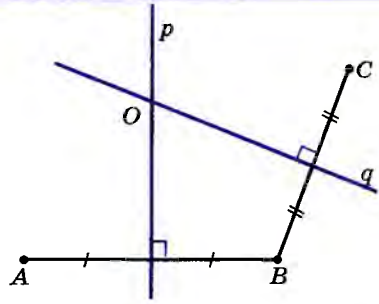
к отрезкам AB и BC $\underline{\hspace{2cm}}$



Прямые p и q — серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC . Докажите, что $AO = OC$.

Доказательство.

Так как прямая p — _____
 _____ перпендикуляр к _____
 AB , то $AO =$ _____. Аналогично, так
 как прямая q — серединный _____
 к отрезку BC , то $OB =$ _____. Итак, $AO = OB =$ _____, поэтому
 $AO =$ _____, что и требовалось доказать.



Прямая p — серединный перпендикуляр к отрезку CE . Верно ли, что:
 а) точка A равноудалена от концов отрезка CE ; б) расстояния от точки M до точек C и E не равны; в) точка H равноудалена от точек C и E ; г) точка T удалена на разные расстояния от концов отрезка CE ?

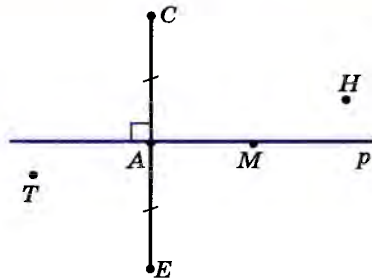
Решение.

а) Точка A лежит на _____ перпендикуляре к отрезку CE , следовательно, она _____ от концов этого отрезка, т. е. данное утверждение о точке A _____

б) Точка M лежит на серединном _____ к отрезку _____, поэтому она _____ от концов отрезка CE , а значит, расстояния от нее до точек C и _____, т. е. данное утверждение о точке M _____

в) Если бы точка H была равноудалена от точек C и E , то она лежала бы на серединном _____ к отрезку _____, но это не так, и поэтому данное утверждение о точке H _____

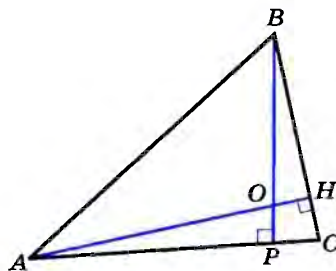
г) Если бы точка T была удалена на равные расстояния от точек C и E , то она лежала бы на серединном _____ к отрезку _____, что в данном случае не выполняется. Следовательно, данное утверждение о точке T _____



Отрезки AH и BP — высоты треугольника ABC . Проведите с помощью одной линейки (без делений) высоту из вершины C .

Решение.

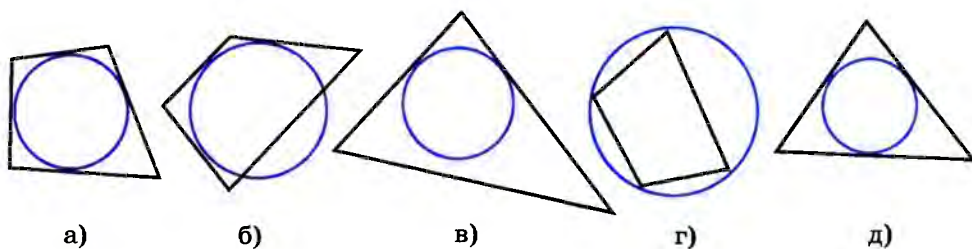
Высоты треугольника пересекаются в _____ точке, поэтому третья высота треугольника проходит через точку _____. С помощью линейки проведем прямую _____ и обозначим буквой T точку пересечения этой прямой с прямой AB . Отрезок _____ — искомая _____ треугольника ABC .



§ 4 Вписанная и описанная окружности

104

На каких рисунках a — d изображены многоугольник и вписанная в него окружность?



Решение.

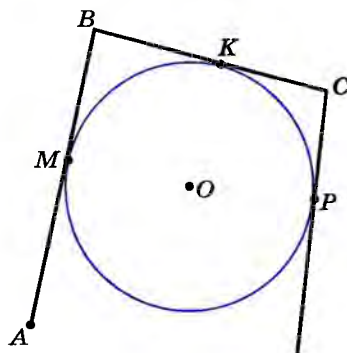
Окружность называется вписанной в _____, если _____ стороны многоугольника _____ окружности. Все _____ многоугольника касаются окружности на рисунках _____ и _____, следовательно, многоугольник и _____ в него окружность изображены на рисунках _____ и _____

Ответ. _____ и _____

Достройте четырехугольник $ABCD$ так, чтобы он был описан около данной окружности.

Решение.

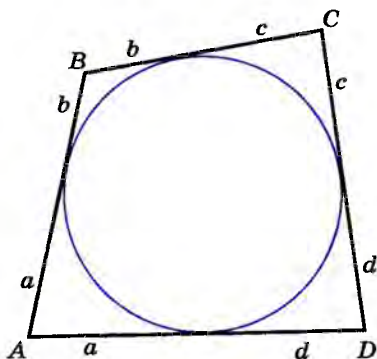
Многоугольник описан около окружности, если _____ его стороны касаются _____. Проведем через точку A _____ к данной окружности, отличную от AM , и обозначим буквой D _____ пересечения этой касательной и прямой CP . Четырехугольник _____ — искомый.



Четырехугольник $ABCD$ описан около окружности. Докажите, что $AB + CD = BC + AD$.

Доказательство.

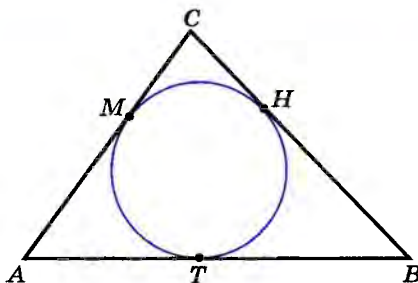
Используя свойство отрезков касательных к _____, проведенных из одной точки, получаем: $AB + CD = a + b + _ + _$, $BC + AD = _$. Следовательно, $AB + _ = BC + _$, что и требовалось _____.



Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается его сторон в точках H , M и T . Найдите периметр треугольника ABC , если $AM = 5$ м, $CH = 3$ м, $BT = 6$ м.

Решение.

Отрезки касательных к _____, проведенные из _____,



одной _____, равны. Поэтому $AT = \underline{\hspace{2cm}} = 5$ м, $CM = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ м, $BH = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ м. Следовательно, $P_{ABC} = AM + MC + CH + \underline{\hspace{4cm}} = 2 \cdot (AM + \underline{\hspace{4cm}}) = \underline{\hspace{2cm}} \cdot (5 + \underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}}$ (м).

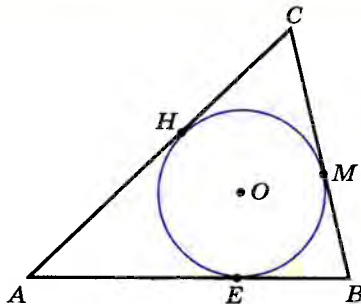
О т в е т. $P_{ABC} = \underline{\hspace{2cm}}$ м.

108

Найдите площадь треугольника ABC , если его периметр равен 60 см, а радиус r вписанной окружности равен 4 см.

Р е ш е н и е.

Соединим центр окружности с вершинами треугольника и точками H , M и E касания сторон треугольника и окружности. Так как радиус, проведенный в точку _____,



перпендикулярен к касательной, то $OH \perp \underline{\hspace{2cm}}$, следовательно, отрезок OH — _____ треугольника AOC . Аналогично отрезок OM — высота _____ BOC , отрезок OE — _____ треугольника _____. Поэтому $S_{AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot \underline{\hspace{2cm}}$.

Аналогично $S_{BOC} = \frac{1}{2} BC \cdot \underline{\hspace{2cm}}$ и $S_{AOC} = \frac{1}{2} AC \cdot \underline{\hspace{2cm}}$

Итак, $S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + \underline{\hspace{2cm}} = \frac{1}{2} (AB \cdot OE + BC \cdot \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}} (AB \cdot r + BC \cdot r + \underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}} (AB + \underline{\hspace{2cm}} + AC)r = \underline{\hspace{2cm}} P_{ABC} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \frac{1}{2} \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (см²).

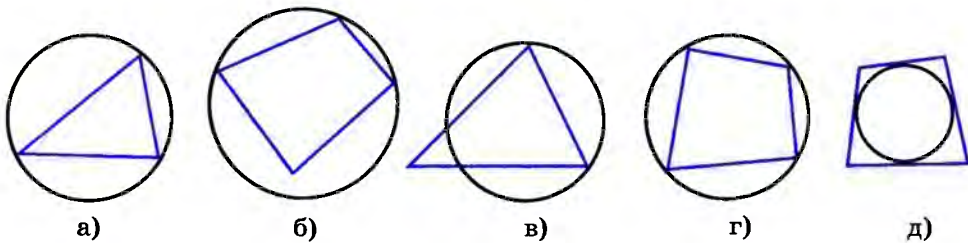
О т в е т. _____

109

На каких рисунках $a - d$ изображены многоугольник и описанная около него окружность?

Р е ш е н и е.

Окружность называется _____ около многоугольника, если _____ вершины многоугольника _____ на окружности.



Все вершины многоугольника _____ на окружности на рисунках ___ и ___, следовательно, многоугольник и описанная _____ него окружность изображены на рисунках ___ и ___

О т в е т . _____

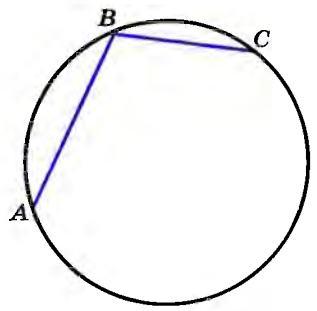
110

Достройте четырехугольник $ABCD$ так, чтобы он был вписан в окружность.

Р е ш е н и е.

Многоугольник вписан в окружность, если _____ его вершины лежат на _____

Отметим на дуге AC точку D и проведем отрезки AD и _____. Четырехугольник _____ искомый.



111

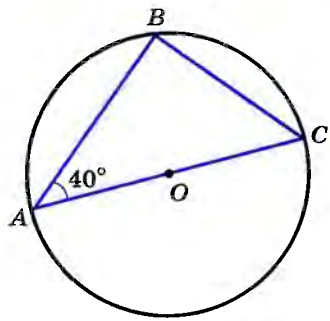
В треугольнике ABC $\angle A = 40^\circ$. Найдите остальные углы треугольника, если центр описанной около него окружности лежит на стороне AC .

Р е ш е н и е.

Так как точки A , B и _____ лежат на данной _____, а ее центр — точка O — лежит на отрезке _____, то отрезок AC — _____

данной окружности, а угол B является _____ в эту окружность и опирается на ее _____. Поэтому $\angle B =$ _____, а $\angle C = 180^\circ - (40^\circ + \text{_____}) =$ _____

О т в е т . $\angle B =$ _____, $\angle C =$ _____

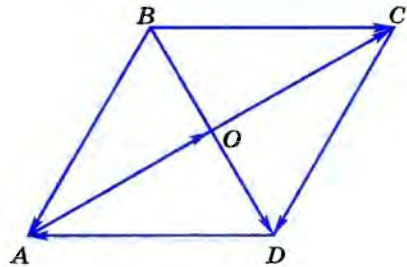


§ 1

Понятие вектора

112

На рисунке изображен ромб $ABCD$, где $AB = 4$, $\angle BAD = 60^\circ$.



- а) Началом каких ненулевых векторов служит точка B ?
- б) Концом каких данных ненулевых векторов служит точка A ?
- в) Как называется и обозначается вектор с началом и концом в точке C ?
- г) Найдите длины (модули) векторов \vec{BC} и \vec{BD} .

- д) Какой ненулевой вектор коллинеарен вектору \vec{BA} ?
- е) Какие данные ненулевые векторы сонаправлены и какие противоположно направлены?
- ж) Равны ли векторы \vec{BA} и \vec{CD} , \vec{BC} и \vec{DA} , \vec{BA} и \vec{BD} , \vec{AO} и \vec{AC} , \vec{AC} и \vec{BC} , \vec{AO} и \vec{OC} ?

з) Какой вектор, равный вектору \vec{CD} , отложен от точки B ?

О т в е т. а) \vec{BA} , _____, _____; б) _____

в) вектор с началом и концом в _____ C называется _____ и обозначается _____ или _____

г) $|\vec{BC}| =$ _____, _____

д) вектору \vec{BA} _____ вектор _____

е) сонаправлены ненулевые векторы _____ и _____, _____ и _____, противоположно _____ векторы _____ и _____

ж) \vec{BA} _____ \vec{CD} , так как $|\vec{BA}|$ _____ $|\vec{CD}|$ и $\vec{BA} \uparrow\uparrow$ _____; \vec{BC} _____ \vec{DA} , так как \vec{BC} и _____ не сонаправлены; \vec{BA} _____ \vec{BD} , так как \vec{BA} и \vec{BD} _____; \vec{AO} _____ \vec{AC} , так как $|\vec{AO}|$ _____ $|\vec{AC}|$; _____

з) _____

а) Постройте ненулевой вектор \vec{c} началом в точке O :

коллинеарный вектору \vec{a} ;

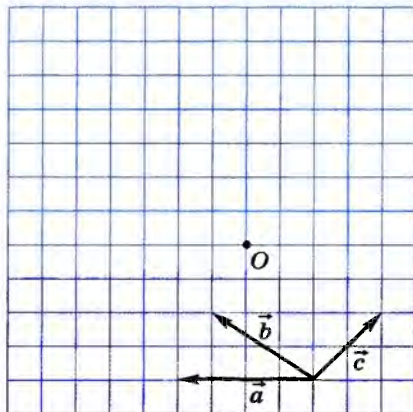
сонаправленный с вектором \vec{b} ;

противоположно направленный вектору \vec{c} .

б) Отложите от точки O вектор, равный вектору \vec{c} .

в) Сколько векторов, равных вектору \vec{c} , можно отложить от точки O ?

О т в е т. в) От точки O можно отложить только _____ вектор, равный вектору \vec{c} .



Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 3 дм и 4 дм. Найдите длину вектора \vec{AC} .

Р е ш е н и е.

Длина вектора \vec{AC} — это длина _____ AC . Отрезок AC является _____ прямоугольника $ABCD$, следовательно, $AC = \sqrt{3^2 + \underline{\quad}} = \underline{\quad}$ (дм), т. е. $|\vec{AC}| = \underline{\quad}$ дм.

О т в е т. _____

§ 2

Сложение и вычитание векторов

Используя правило треугольника, найдите сумму векторов:

а) \vec{PM} и \vec{MT} ; б) \vec{CH} и \vec{HC} ; в) $\vec{AB} + \vec{0}$; г) $\vec{0} + \vec{CE}$.

Р е ш е н и е.

а) $\vec{PM} + \vec{MT} = \underline{\quad}$

б) $\vec{CH} + \vec{HC} = \underline{\quad} = \underline{\quad}$

в) $\vec{AB} + \vec{0} = \underline{\quad} + \vec{BB} = \underline{\quad}$

г) $\vec{0} + \vec{CE} = \underline{\quad} + \vec{CE} = \underline{\quad}$

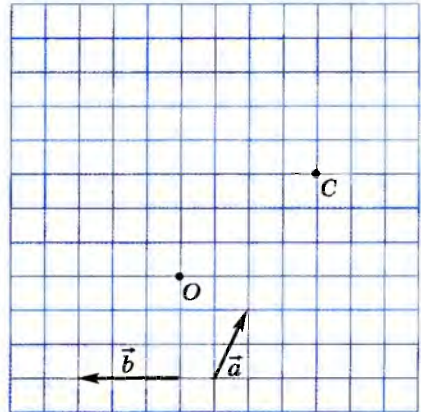
О т в е т. а) _____ ; б) _____ ; в) _____ ; г) _____

Используя правило треугольника, постройте векторы $\vec{OA} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{CB} = \vec{a} + \vec{b}$. Определите вид четырехугольника $OABC$.

Решение.

Отложим от точки O вектор $\vec{OM} = \vec{a}$ и от точки M вектор $\vec{MA} = \vec{b}$, тогда $\vec{OA} = \vec{OM} + \vec{MA} = \vec{a} + \vec{b}$. Аналогично строим $\vec{CK} = \vec{a}$ и $\vec{KB} = \vec{b}$, тогда $\vec{CB} = \vec{CK} + \vec{KB} = \vec{a} + \vec{b}$. Так как $\vec{OA} = \vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{CB} = \vec{a} + \vec{b}$, следовательно, $OA \parallel CB$ и $OA = CB$, поэтому четырехугольник $OABC$ —

Отв е т . Четырехугольник $OABC$ —



Используя правило параллелограмма, постройте векторы $\vec{OP} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\vec{CT} = \vec{y} + \vec{x}$. Докажите, что $\vec{OC} = \vec{PT}$.

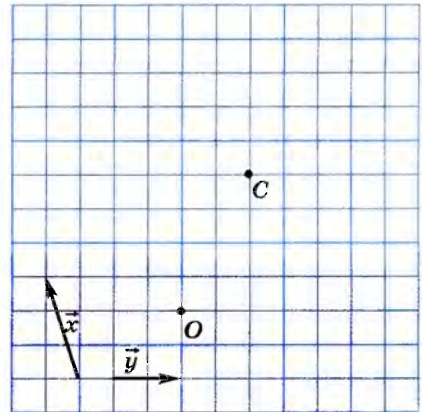
Решение.

Отложим от точки O векторы $\vec{OA} = \vec{x}$ и $\vec{OB} = \vec{y}$. Построим точку P так, чтобы четырехугольник $OAPB$ был

параллелограммом, тогда по правилу параллелограмма $\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{x} + \vec{y}$. Отложим от точки C векторы $\vec{CM} = \vec{y}$ и $\vec{CN} = \vec{x}$. Построим

параллелограмм $CMTE$, тогда по правилу параллелограмма $\vec{CT} = \vec{CM} + \vec{CN} = \vec{y} + \vec{x}$.

Так как $\vec{OP} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\vec{CT} = \vec{y} + \vec{x}$ и $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (переместительный закон сложения векторов), то $\vec{OP} = \vec{CT}$. Следовательно, четырехугольник $OPTC$ — параллелограмм, а потому $\vec{OC} = \vec{PT}$, что и требовалось доказать.



а) Постройте векторы $\vec{OT} = \vec{x} + \vec{y}$ и $\vec{PM} = \vec{y} + \vec{z}$.

б) Отложите от точки H векторы $\vec{m} = \vec{OT} + \vec{z}$ и $\vec{n} = \vec{x} + \vec{PM}$.

в) Докажите, что $\vec{m} = \vec{n}$.

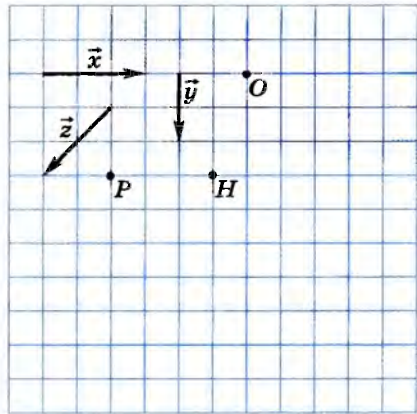
Доказательство.

Так как $\vec{OT} = \vec{x} + \underline{\quad}$, то $\vec{m} = \vec{OT} + \vec{z} = (\underline{\quad} + \vec{y}) + \vec{z}$. Так как $\vec{PM} = \vec{y} + \underline{\quad}$, то $\vec{n} = \underline{\quad} + \vec{PM} = \vec{x} + (\underline{\quad} + \vec{z})$.

В соответствии с сочетательным _____ сложения векторов выполняется равенство:

$$(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} = \underline{\quad} + (\underline{\quad} + \underline{\quad}),$$

а значит, $\vec{m} = \vec{n}$, что и требовалось _____



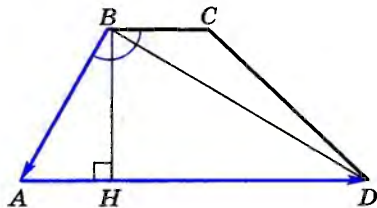
В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $AD = 6$ см, $AB = 3$ см.

Найдите $|\vec{BA} + \vec{AD}|$.

Решение.

По правилу треугольника имеем: $\vec{BA} + \vec{AD} = \underline{\quad}$, следовательно, $|\vec{BA} + \vec{AD}| = |\underline{\quad}|$. Длина вектора \vec{BD} — это _____ отрезка _____.

Так как $AD \parallel \underline{\quad}$, то $\angle BAD = 180^\circ - \angle \underline{\quad} = \underline{\quad}$



Проведем высоту BH трапеции. В прямоугольном треугольнике ABH имеем: $BH = AB \cdot \sin \underline{\quad} = 3 \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$ (см), $AH = \underline{\quad} \cdot \cos \underline{\quad} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$ (см).

Из треугольника BHD по теореме Пифагора получаем: $BD^2 = \underline{\quad} + (AD - \underline{\quad})^2 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad}$ (см²), откуда $BD = \underline{\quad}$ см.

О т в е т. _____

Пользуясь правилами и законами сложения векторов, упростите выражение $\vec{MC} + \vec{AM} + \vec{CT}$.

Решение.

$$\begin{aligned} & \vec{MC} + \vec{AM} + \vec{CT} = \\ & = (\vec{MC} + \underline{\hspace{2cm}}) + \vec{CT} = \\ & = (\vec{AM} + \underline{\hspace{2cm}}) + \vec{CT} = \\ & = \underline{\hspace{2cm}} + \vec{CT} = \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

Ответ. _____

Обоснование.

_____ закон
 _____ закон
 _____ треугольника
 правило _____

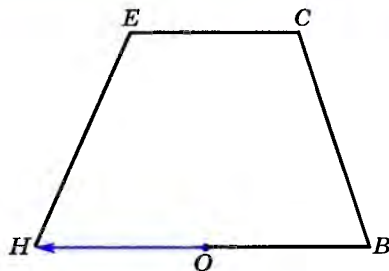
Пользуясь правилом многоугольника и законами сложения векторов, упростите выражение $\vec{BH} + \vec{HK} + \vec{TP} + \vec{MT} + \vec{KM}$.

Решение.

$$\begin{aligned} & \vec{BH} + \vec{HK} + \vec{TP} + \vec{MT} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} + \vec{TP} + \vec{MT} + \underline{\hspace{2cm}} = \\ & = \vec{BK} + \underline{\hspace{2cm}} + \vec{TP} + \vec{MT} = \underline{\hspace{2cm}} + \vec{MT} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} + \vec{TP} = \\ & = \underline{\hspace{2cm}} \end{aligned}$$

Ответ. _____

В трапеции $ВСЕН$, изображенной на рисунке, $BH = 2CE$, точка O — середина BH . Какие векторы с концом и началом в отмеченных точках являются противоположными вектору \vec{OH} ?



Решение.

По определению противоположным вектору \vec{OH} является вектор, направление которого _____ направлению вектора _____, а длина _____ длине вектора \vec{OH} .

Противоположно направлены вектору \vec{OH} векторы \vec{HB} , _____, _____, _____. Из них имеют длину, равную _____ вектора \vec{OH} , векторы _____, _____, _____

Итак, _____ вектору \vec{OH} являются векторы _____, _____, _____

Ответ. _____

Какой из векторов \vec{CM} , \vec{CP} , \vec{PM} , \vec{PC} равен разности векторов \vec{MC} и \vec{MP} ?

Решение.

По определению разностью векторов \vec{MC} и \vec{MP} является вектор \vec{x} , такой, что $\underline{\hspace{2cm}} + \vec{x} = \underline{\hspace{2cm}}$

Проверим, какой из данных векторов удовлетворяет этому условию:

$$\vec{MP} + \vec{CM} \underline{\hspace{1cm}} \vec{MC}, \text{ следовательно, } \vec{CM} \neq \vec{MC} - \underline{\hspace{1cm}}$$

$$\vec{MP} + \vec{CP} \underline{\hspace{1cm}} \vec{MC}, \text{ следовательно, } \vec{CP} \underline{\hspace{1cm}} \vec{MC} - \vec{MP}.$$

$$\vec{MP} + \vec{PM} \underline{\hspace{1cm}}, \text{ т. е. } \vec{PM} \underline{\hspace{1cm}} \vec{MC} - \vec{MP}.$$

$$\vec{MP} + \underline{\hspace{2cm}}, \text{ т. е. } \vec{PC} \underline{\hspace{1cm}} \vec{MC} - \vec{MP}.$$

О т в е т. $\underline{\hspace{2cm}}$

Докажите, что для любых трех точек X, Y, Z верно равенство $\vec{XY} - \vec{ZY} = \vec{XY} + \vec{YZ}$.

Доказательство.

$\rightarrow \rightarrow \rightarrow$

По теореме о разности векторов $a - b = a + (\underline{\hspace{1cm}})$, поэтому $\vec{XY} - \vec{ZY} = \underline{\hspace{1cm}} + (\underline{\hspace{1cm}})$. Запись « $-\vec{ZY}$ » означает «вектор, противоположный вектору $\underline{\hspace{1cm}}$ », т. е. $-\vec{ZY} = \underline{\hspace{1cm}}$. Следовательно, $\vec{XY} - \vec{ZY} = \underline{\hspace{1cm}} + (-\vec{ZY}) = \vec{XY} + \underline{\hspace{1cm}}$, что и требовалось

Упростите выражение $(\vec{HB} + \vec{BA} - \vec{TA}) - (\vec{PX} - \vec{TX})$.

Решение.

$$\begin{aligned} & (\vec{HB} + \vec{BA} - \vec{TA}) - (\vec{PX} - \underline{\hspace{1cm}}) = (\underline{\hspace{1cm}} - \vec{TA}) - \\ & - (\vec{PX} + (-\underline{\hspace{1cm}})) = (\vec{HA} + (-\underline{\hspace{1cm}})) - (\vec{PX} + \underline{\hspace{1cm}}) = \\ & = (\vec{HA} + \underline{\hspace{1cm}}) - \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} + (-\underline{\hspace{1cm}}) = \\ & = \vec{HT} + \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}} \end{aligned}$$

О т в е т. $\underline{\hspace{2cm}}$

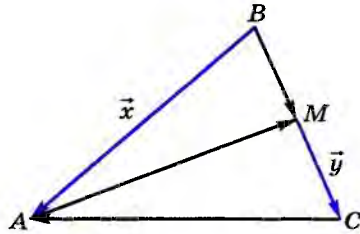
Отрезок AM — медиана треугольника ABC . Выразите векторы \vec{BM} , \vec{AM} , \vec{CA} через векторы $\vec{BA} = \vec{x}$ и $\vec{MC} = \vec{y}$.

О т в е т .

$$\vec{BM} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{AM} = \underline{\hspace{2cm}} - \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\vec{CA} = -\vec{y} - \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}$$



Найдите вектор \vec{x} , если:

а) $\vec{PO} - \vec{x} = \vec{PM}$; б) $\vec{x} - \vec{MA} = \vec{PM}$; в) $\vec{CM} - \vec{x} = \vec{PM}$.

Р е ш е н и е .

а) $\vec{PO} - \vec{x} = \vec{PM}$, следовательно, $\vec{PO} = \vec{PM} + \underline{\hspace{2cm}}$, откуда $\vec{x} = \vec{PO} - \underline{\hspace{2cm}} = \vec{PO} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

б) $\vec{x} - \vec{MA} = \vec{PM}$, откуда $\vec{x} = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

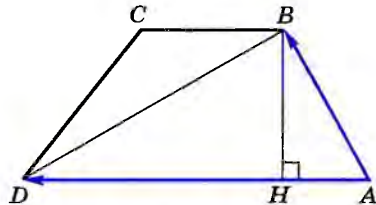
в) $\vec{CM} - \vec{x} = \vec{PM}$, поэтому $\vec{x} = \vec{CM} - \underline{\hspace{2cm}} = \vec{CM} + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$

О т в е т . а) $\underline{\hspace{2cm}}$; б) $\underline{\hspace{2cm}}$; в) $\underline{\hspace{2cm}}$

В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AD \parallel BC$, $\angle ABC = 120^\circ$, $AD = 6$ м, $AB = 3$ м. Найдите $|\vec{AB} - \vec{AD}|$.

Р е ш е н и е .

$\vec{AB} - \vec{AD} = \underline{\hspace{2cm}}$, следовательно, $|\vec{AB} - \vec{AD}| = |\underline{\hspace{2cm}}| = \underline{\hspace{2cm}}$. Так как $AD \parallel \underline{\hspace{2cm}}$, то $\angle BAD = 180^\circ - \angle \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$



Проведем высоту BH трапеции. В треугольнике ABH имеем: $BH = AB \cdot \sin \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (м), $HA = AB \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \cdot \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (м). Тогда $DH = AD - \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ (м).

Из треугольника BHD по теореме Пифагора находим:

$$BD^2 = \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = (\underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}}) = \underline{\hspace{2cm}} \text{ (м}^2\text{)},$$

откуда $BD = \underline{\hspace{2cm}}$ м.

Итак, $|\vec{AB} - \vec{AD}| = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ м.

О т в е т . $\underline{\hspace{2cm}}$

129

Отложите от точки O векторы $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{y} = 2\vec{c}$, $\vec{z} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{c}$.

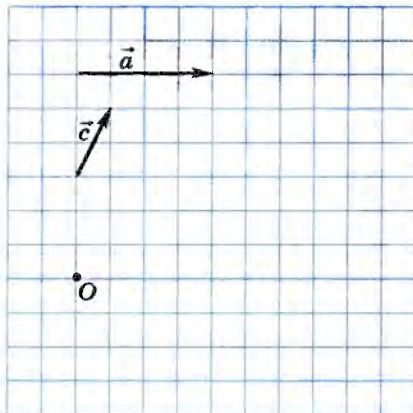
Решение.

Так как $\vec{x} = \frac{1}{2}\vec{a}$, то, согласно определению произведения вектора на число, $\vec{x} \uparrow \uparrow \vec{a}$ и $|\vec{x}| = \frac{1}{2}|\vec{a}|$. Отложим от точки O вектор \vec{x} .

Аналогично $\vec{y} \uparrow \uparrow \vec{c}$ и $|\vec{y}| = 2|\vec{c}|$. Отложим от точки O вектор \vec{y} .

Так как векторы \vec{x} и \vec{y} отложены от точки O , то для построения вектора $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$ удобно по правилу параллелограмма.

Строим вектор \vec{z} .

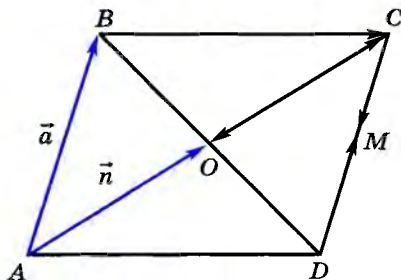


130

На рисунке изображен параллелограмм $ABCD$, где $DM = CM$, $\vec{AO} = \vec{n}$, $\vec{AB} = \vec{a}$.

Выразите:

- а) векторы \vec{AC} и \vec{CO} через вектор \vec{n} ;
- б) векторы \vec{DM} и \vec{CM} через вектор \vec{a} ;
- в) вектор \vec{BC} через векторы \vec{a} и \vec{n} .



Решение.

а) Так как точка O является точкой пересечения диагоналей параллелограмма, то $AO = CO$, и, значит, $|\vec{AC}| = 2|\vec{AO}|$. Кроме того, $\vec{AC} \uparrow \uparrow \vec{AO}$, следовательно, согласно определению произведения вектора на число, $\vec{AC} = 2\vec{AO} = 2\vec{n}$. Далее, $|\vec{CO}| = |\vec{AO}|$ и $\vec{CO} \uparrow \uparrow \vec{AO}$, поэтому $\vec{CO} = -\vec{AO} = -\vec{n}$.

б) Противоположные стороны параллелограмма _____ и _____, поэтому $\vec{DC} - \vec{AB} = \vec{a}$. Далее, $\vec{DM} \uparrow \vec{DC}$ и $|\vec{DM}| = \frac{1}{2} |\vec{DC}|$, следовательно, согласно определению _____ вектора на _____, $\vec{DM} = \frac{1}{2} \vec{DC} = \frac{1}{2} \vec{a}$. Так как $\vec{CM} \uparrow \vec{DC}$ и $|\vec{CM}| = \frac{1}{2} |\vec{DC}|$, то $\vec{CM} = \frac{1}{2} \vec{DC} = \frac{1}{2} \vec{a}$.
 в) По правилу треугольника $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$. Но $\vec{BA} = -\vec{AB} = -\vec{a}$, $\vec{AC} = 2\vec{n}$, следовательно, $\vec{BC} = -\vec{a} + 2\vec{n}$.

О т в е т.

а) _____

б) _____

в) _____

131

Упростите выражение:

а) $-0,5(12\vec{a})$;

б) $2,5\vec{b} - 1,7\vec{b}$;

в) $3(\vec{c} + \vec{p}) - 5\vec{p}$;

г) $2(5\vec{p} - 3\vec{q}) - 3(3\vec{p} - 2\vec{q})$.

Р е ш е н и е.

а) $-0,5(12\vec{a}) = (\frac{1}{2} \cdot 12) \vec{a} = -6\vec{a}$

б) $2,5\vec{b} - 1,7\vec{b} = (2,5 - 1,7) \vec{b} = 0,8\vec{b}$

в) $3(\vec{c} + \vec{p}) - 5\vec{p} = 3\vec{c} + 3\vec{p} - 5\vec{p} = 3\vec{c} - 2\vec{p} = 3\vec{c} + (-2)\vec{p} = 3\vec{c} - 2\vec{p}$

г) $2(5\vec{p} - 3\vec{q}) - 3(3\vec{p} - 2\vec{q}) = 10\vec{p} - 6\vec{q} - 9\vec{p} + 6\vec{q} = (10 - 9)\vec{p} + (-6 + 6)\vec{q} = \vec{p}$

О т в е т. а) $-6\vec{a}$; б) $0,8\vec{b}$; в) $3\vec{c} - 2\vec{p}$; г) \vec{p}

132

Докажите, что векторы $\vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{p}) - 3\vec{p}$ и \vec{a} коллинеарны.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$\vec{c} = 2(\vec{a} + \vec{p}) - 3\vec{p} = 2\vec{a} + 2\vec{p} - 3\vec{p} = 2\vec{a} + (-1)\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{p}$
 $= 2\vec{a} + (-1)\vec{p} = 2\vec{a} - \vec{p}$. По определению произведения вектора на _____ векторы \vec{a} и $2\vec{a}$ _____, что и требовалось _____

Докажите, что для любого вектора \vec{a} справедливы равенства:

а) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$; б) $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$.

Доказательство.

Если $\vec{a} = \vec{0}$, то обе части каждого равенства — нулевые векторы, поэтому равенства справедливы. Пусть $\vec{a} \neq \vec{0}$.

а) По определению произведения вектора на 1 $|\vec{a}| = |1 \cdot \vec{a}| = |1| \cdot |\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$, а так как число 1 положительно, то векторы $1 \cdot \vec{a}$ и \vec{a} $\underline{\hspace{2cm}}$.

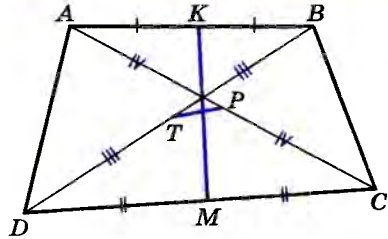
Следовательно, по определению равных векторов $1 \cdot \vec{a} \underline{\hspace{1cm}} \vec{a}$.

б) По определению $|\vec{a}| = |(-1) \cdot \vec{a}| = |(-1)| \cdot |\vec{a}| = 1 \cdot |\vec{a}| = |\vec{a}|$, а так как $-1 < 0$, то векторы $(-1) \cdot \vec{a}$ и \vec{a} противоположно $\underline{\hspace{2cm}}$.

По определению противоположного вектора $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$ и $-\vec{a} \uparrow \downarrow \vec{a}$. Следовательно, $|(-1) \cdot \vec{a}| = |-\vec{a}|$ и $(-1) \cdot \vec{a} \uparrow \downarrow -\vec{a}$, т. е. $(-1) \cdot \vec{a} \underline{\hspace{1cm}} -\vec{a}$.

134

Точки K и M — середины сторон AB и CD четырехугольника $ABCD$, изображенного на рисунке, точки P и T — середины диагоналей AC и BD . Докажите, что середины отрезков KM и PT совпадают.



Доказательство.

Пусть точка X — середина отрезка KM , точка Y — середина отрезка PT . Тогда для произвольной точки O имеем:

$$\vec{OX} = \frac{1}{2}(\vec{OK} + \vec{OM}) \quad (1)$$

и

$$\vec{OY} = \frac{1}{2}(\vec{OP} + \vec{OT}). \quad (2)$$

По условию задачи точки K и M — середины отрезков AB и CD , следовательно, $\vec{OK} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB})$ и $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD})$. Аналогично $\vec{OP} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC})$ и $\vec{OT} = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OD})$.

Подставляя найденные выражения в формулы (1) и (2), получим:

$$\vec{OX} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) + \frac{1}{2}(\vec{OC} + \vec{OD}) \right) = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}),$$

$$\vec{OY} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) + \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OD}) \right) = \frac{1}{4}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD}).$$

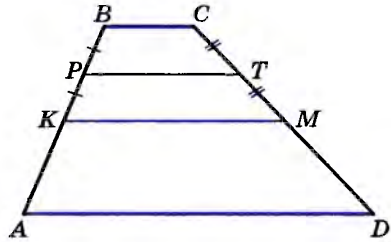
Отсюда следует, что $\vec{OX} = \vec{OY}$. Так как от точки O можно отложить только _____ вектор, равный данному, то точки X и _____ совпадают, следовательно, совпадают середины отрезков _____ и _____, что и требовалось доказать.

135

В трапеции $ABCD$, изображенной на рисунке, $AK = KB$, $CM = MD$, $BP = PK$, $CT = TM$, $BC = 2$ м, $AD = 8$ м. Найдите PT .

Решение.

Так как $AK = KB$ и $CM = MD$, то отрезок KM — средняя трапеции, следовательно, $KM \parallel BC$ и $KM = \frac{1}{2}(BC + AD) = \frac{1}{2}(2 + 8) = 5$ (м).



В четырехугольнике $BCMK$ стороны BC и KM _____, а стороны BK и _____ не параллельны, следовательно, $BCMK$ — _____ . По условию задачи $BP = PK$ и $CT = TM$, поэтому отрезок PT — средняя трапеции $BCMK$, и, следовательно, $PT = \frac{1}{2}(BC + KM) = \frac{1}{2}(2 + 5) = 3.5$ (м).

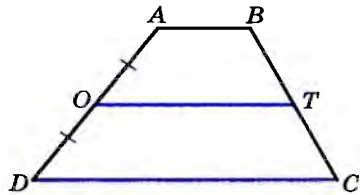
Ответ.

136

Прямая OT параллельна основанию CD трапеции $ABCD$, причем $AO = OD$. Докажите, что отрезок OT — средняя линия трапеции.

Доказательство.

В соответствии с определением средней трапеции нужно доказать, что точка T является _____ стороны BC .



Предположим, что это не так, и пусть серединой стороны BC является точка X . Тогда отрезок OX — _____ линия трапеции, поэтому $OX \perp CD$. Но по условию задачи $OT \perp CD$.

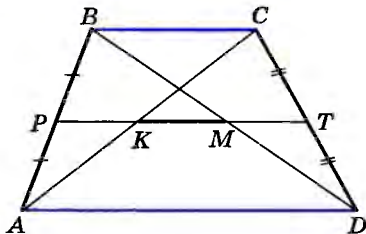
Итак, через точку O проходят _____ прямые, параллельные прямой _____, что противоречит _____ параллельных прямым. Следовательно, точка T — _____ BC , т. е. отрезок OT — _____ трапеции, что и требовалось _____

137

В трапеции $ABCD$ отрезок PT — средняя линия, $AD = 9$ м, $BC = 5$ м. Найдите длину отрезка KM .

Решение.

По свойству средней _____ трапеции $PT \parallel BC$ и $PT = \frac{1}{2}(AD + BC)$. В треугольнике ABC отрезки AP и PB равны и прямая PK параллельна стороне _____, следовательно, отрезок PK — _____ линия треугольника ABC (задача 65). Поэтому $PK = \frac{1}{2}BC$. Аналогично в треугольнике BDC $TM = \frac{1}{2}BC$.



Итак, $KM = PT - (PK + TM) = \frac{1}{2}(AD + BC) - (\frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}BC) + \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}(9) = 4.5$ (м).

Ответ. _____

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава V. Четырехугольники

§ 1. Многоугольники	3
§ 2. Параллелограмм и трапеция	5
§ 3. Прямоугольник, ромб, квадрат	11

Глава VI. Площадь

§ 1. Площадь многоугольника	14
§ 2. Площади параллелограмма, треугольника и трапеции	16
§ 3. Теорема Пифагора	21

Глава VII. Подобные треугольники

§ 1. Определение подобных треугольников	23
§ 2. Признаки подобия треугольников	25
§ 3. Применение подобия к доказательству теорем и решению задач	27
§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника	33

Глава VIII. Окружность

§ 1. Касательная к окружности	37
§ 2. Центральные и вписанные углы	40
§ 3. Четыре замечательные точки треугольника	44
§ 4. Вписанная и описанная окружности	49

Глава IX. Векторы

§ 1. Понятие вектора	53
§ 2. Сложение и вычитание векторов	54
§ 3. Умножение вектора на число. Применение векторов к решению задач	60